MASTER 1 INFO 2017–2018

Optimisation Algorithmique

EXAMEN, durée 2h

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on note $\nabla f(x)$ le gradient de f au point x et $H_f(x)$ la matrice hessienne de f en $x \in \mathbb{R}^2$.
On suppose qu'il existe un minimum unique $x^* = \arg\min_x f(x)$ et l'on note $(x^{(\mathrm{k})})_{k\in\mathbb{N}} = \left({x_1}^{(\mathrm{k})}, {x_2}^{(\mathrm{k})}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $x^* \in \mathbb{R}^2$ quand k tend vers l'infini.

1. Expliquer la mise en place d'un algorithme de descente général pour déterminer x^*.

2. Pour déterminer le pas de descente σ de f en x dans la direction d, on utilise souvent le "backtracking". Expliquez de quoi il s'agit. Donner l'algorithme (pseudo-code).

3. Donner la définition d'une méthode itérative d'ordre $r > 1$. Quel est l'intérêt de cette notion ? Expliquer.

Exercice 1

Soit $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Que vaut $x^* = \arg\min_x f(x)$?

2. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$ au point $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et l'on définit la suite de points de $\mathbb{R}^2$ par

$$x^{(\mathrm{k}+1)} = x^{(\mathrm{k})} + \sigma_k d^{(\mathrm{k})}$$

où $d^{(\mathrm{k})}$ est la direction de descente, en $x^{(\mathrm{k})}$, donnée par la méthode de descente du gradient ; σ_k est le minimum exact de $\varphi(\sigma) = f(x^{(\mathrm{k})} + \sigma d^{(\mathrm{k})})$.

3. Tracer la ligne de niveau qui passe par $x^{(0)}$.

4. Calculer $d^{(0)}$ et σ_0. En déduire $x^{(1)}$.

5. Faire de même afin d'obtenir $x^{(2)}$ et ensuite $x^{(3)}$.
   (Note : on peut bien sûr déduire les réponses du 4 et 5 à partir d'un calcul direct en 6).

6. En déduire que pour tout $k \geq 0$, $x^{(\mathrm{k})} = c_k \begin{pmatrix} 2 \\ (-1)^k \end{pmatrix}$ où c_k est un réel que l'on déterminera.

7. Vérifier que $d^{(\mathrm{k})}$ et $d^{(\mathrm{k}+1)}$ sont orthogonaux.

8. Montrer que $f(x^{(\mathrm{k}+1)}) = \frac{1}{9} f(x^{(\mathrm{k})})$.

9. Montrer que, indépendamment de $x^{(0)}$, la méthode de Newton converge en une itération.
   Expliquez.

Exercice 2

Un signal, émis par une source de position inconnue $x \in \mathbb{R}^2$, est reçu par m récepteurs de positions connues $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^n$. Grâce à l'intensité du signal, on obtient pour chaque récepteur y_j une estimation (bruitée) de la distance $\|x - y_j\|_2$.
On veut déterminer la position x de la source à partir des données observées (y_j, d_j), pour cela on introduit les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k} \Big| \|x - y_j\|_2 - d_j \Big| \text{ et } f(x) = \sum_{j=1}^{k} \left(\|x - y_j\|_2^2 - d_j^2 \right)^2 .$$

1. Expliquer en quoi ces deux fonctions permettent de modéliser le problème et justifier pourquoi $x^\star = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min}\, f(x) = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min}\, g(x)$ Pourquoi a-t-on choisi la fonction f ?
2. Que peut-on dire du problème $x^\star = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min}\, f(x)$ en termes d'existence et d'unicité ?
3. Calculer $\nabla f(x)$.