UFR
DE MATHÉMATIQUES
ET INFORMATIQUE

UNIVERSITÉ
PARIS
DESCARTES

MASTER 1 INFO 2018–2019

Optimisation Algorithmique

EXAMEN, durée 2h

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours

Soit f une fonction quadratique définie sur pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} x^t A\, x - b^t x + c$$

où A est une matrice réelle carrée symétrique, définie positive ; $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.

1. Donner, sans calculs, $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$.
2. Justifier pourquoi $x^* = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min}\, f(x) = A^{-1} b$.
3. Afin de comparer les algorithmes suivants, on va les appliquer à la minimisation de f. Pour $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, décrire dans chacun des cas le comportement auquel l'on peut attendre (convergence, nombre d'itérations,. . .) :
   (a) Algorithme de descente de gradient ;
   (b) Algorithme de Newton ;
   (c) Algorithme du gradient conjugué (linéaire).

Exercice 1

Soit $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2$.

1. Que vaut $x^* = \underset{x}{\arg\min}\, f(x)$?
2. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$ au point $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
3. Au point $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vérifier que $d^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une direction de descente.
4. Déterminer le pas σ_0 qui minimise f le long de cette direction.
   (Indic. : poser $\varphi(\sigma) = f(x^{(0)} + \sigma d^{(0)})$ et minimiser φ sur $\mathbb{R}_+^*$).

   Calculer ensuite $f(x^{(1)})$. Conclusion ?
5. Tracer la ligne de niveau de f qui passe par $x^{(0)}$, placez les points x^*, $x^{(0)}$ et le vecteur $d^{(0)}$.

6. On garde le même point initial $x^{(0)}$ mais l'on prend $d^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)})$.
   Déterminer alors σ_0, $x^{(1)}$ et $f(x^{(1)})$, comme dans 4. Commentez.

7. Montrer que, indépendamment de $x^{(0)}$, la méthode de Newton converge en une itération.
   Expliquez.

Exercice 2

On pose $g(x_1, x_2) = -\Big(\ln(x_1) + \ln(x_2) + \ln(1 - x_1 - x_2)\Big)$ pour $(x_1, x_2) \in D$.

1. Déterminer et tracer le domaine de définition D de g.

2. Déterminer $\nabla g(x_1, x_2)$ et $H_g(x_1, x_2)$.

3. Déterminer $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v_m = g(x_1^*, x_2^*) = \min\limits_{(x_1,x_2)\in D} g(x_1, x_2)$.

4. Calculer $\tilde{g}(x_1, x_2) = e^{g(x_1,x_2)}$, pour $(x_1, x_2) \in D$. Que peut-on dire de $\tilde{x}^* = \arg\min\limits_{x\in D} \tilde{g}(x)$?

   On désire tester les méthodes de descente de gradient et de Newton sur cette fonction.

5. Expliquer quelles précautions il faut prendre pour appliquer l'algorithme de descente de gradient avec backtracking ?

6. Est-ce qu'il faut prendre les mêmes précautions pour la méthode de Newton ?