Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

MASTER I INFO 2014–2015

Optimisation et Algorithmique

EXAMEN, durée 2h

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on note $\nabla f(x)$ le gradient de f au point x et $H_f(x)$ la matrice hessienne de f en $x \in \mathbb{R}^2$.
On suppose qu'il existe un minimum unique $x^* = \arg\min_x f(x)$ et l'on note $(x^{(\mathrm{k})})_{k\in\mathbb{N}} = \left({x_1}^{(\mathrm{k})}, {x_2}^{(\mathrm{k})}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $x^* \in \mathbb{R}^2$ quand k tend vers l'infini.

1. Pour déterminer le pas de descente σ de f en x dans la direction d on utilise souvent le "backtracking". Expliquez de quoi il s'agit. Donner l'algorithme (pseudo-code).

2. Décrire, en pseudo code (compréhensif), la méthode de descente de gradient et la méthode de Newton.

3. Comparez les avantages et inconvénients de la méthode de descente de gradient et de la méthode de Newton.

4. On rappelle que la méthode itérative qui permet de calculer la suite $(x^{(\mathrm{k})})$ est d'ordre $r > 1$ s'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour k suffisamment grand
$$\frac{\left\|x^{(\mathrm{k+1})} - x^*\right\|}{\left\|x^{(\mathrm{k})} - x^*\right\|^r} \leq C\ .$$
Comment définit on la précision $prec(k)$?
Donner une majoration de $prec(k+1)$ par $prec(k)$ pour une méthode d'ordre 2.
Expliquez le résultat grâce à un exemple où $prec(0) = 1$.

Exercice 1

Soit $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Que vaut $x^* = \arg\min_x f(x)$?

2. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$ au point $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et l'on définit la suite de points de $\mathbb{R}^2$ par

$$x^{(\mathrm{k+1})} = x^{(\mathrm{k})} + \sigma_k d^{(\mathrm{k})}$$

où $d^{(\mathrm{k})}$ est la direction de descente, en $x^{(\mathrm{k})}$, donnée par la méthode de descente du gradient ; σ_k est le minimum exact de $\varphi(\sigma) = f(x^{(\mathrm{k})} + \sigma d^{(\mathrm{k})})$.

3. Tracer la ligne de niveau qui passe par $x^{(0)}$.

4. Calculer $d^{(0)}$ et σ_0. En déduire $x^{(1)}$.

5. Faire de même afin d'obtenir $x^{(2)}$ et ensuite $x^{(3)}$.
   (Note : on peut bien sûr déduire les réponses du 4 et 5 à partir d'un calcul direct en 6).

6. En déduire que pour tout $k \geq 0$, $x^{(\mathrm{k})} = c_k \begin{pmatrix} 2 \\ (-1)^k \end{pmatrix}$ où c_k est un réel que l'on déterminera.

7. Vérifier que $d^{(\mathrm{k})}$ et $d^{(\mathrm{k+1})}$ sont orthogonaux.

8. Montrer que $f(x^{(\mathrm{k+1})}) = \frac{1}{9} f(x^{(\mathrm{k})})$.

9. Montrer que, indépendamment de $x^{(0)}$, la méthode de Newton converge en une itération.
   Expliquez.

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} a_i e^{x_i}$, où $a_2 \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq 2$.

1. Écrire une fonction Scilab `[v] = objectif(x,a)` qui calcule la valeur de f au point x et où $x = [x_1 x_2]^t$ et $a = [a_1 a_2]^t$ sont des vecteurs colonnes dans Scilab.

2. Calculer $\nabla f(x)$ et écrire une fonction Scilab `[v] = grad_objectif(x,a)` qui calcule $\nabla f(x)$.

3. Calculer $H_f(x)$ et écrire une fonction Scilab `[v] = hess_objectif(x,a)` qui calcule $H_f(x)$.

   On généralise : la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e^{x_i}$, où $a_i \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i \leq n$.

4. Reprendre les trois questions précédentes, on notant que maintenant $x = [x_1 \cdots x_n]^t$ et $a = [a_1 \cdots a_n]^t$ sont les vecteurs colonnes dans Scilab.