Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES | USPC Université Sorbonne Paris Cité

MASTER I INFO 2015–2016

Optimisation et Algorithmique

EXAMEN, durée 2h

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on note $\nabla f(x)$ le gradient de f au point x et $H_f(x)$ la matrice hessienne de f en $x \in \mathbb{R}^2$.
On suppose qu'il existe un minimum unique $x^* = \arg\min\limits_x f(x)$ et l'on note $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = \left({x_1}^{(k)}, {x_2}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $x^* \in \mathbb{R}^2$ quand k tend vers l'infini.

1. Expliquer la mise en place d'un algorithme de descente général pour déterminer x^*.

2. Pour déterminer le pas de descente σ de f en x dans la direction d, on utilise souvent le "backtracking". Expliquez de quoi il s'agit. Donner l'algorithme (pseudo-code).

3. Donner la définition d'une méthode itérative d'ordre $r > 1$. Quel est l'intérêt de cette notion ? Expliquer.

Exercice 1

Soit $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2$, pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
On veut tester l'algorithme de descente de gradient sur cette fonction.

1. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$ au point $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
   Quelle est l'allure des lignes de niveau de f ?

2. Que vaut $x^* = \arg\min\limits_x f(x)$? Justifier.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x^*$, donner la direction de descente d en x. Comment obtient-on le pas de descente exact σ en x dans la direction d ? (ne pas faire le calcul exact !).

4. On considère la valeur initiale $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on dire des directions de descente calculées par l'algorithme ? du nombre d'itérations nécessaires ? Justifier.

5. Est-ce qu'il existe des points $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ telle que l'algorithme de descente de gradient converge en une seule itération ? Justifier.

6. À combien d'itérations faut-il s'attendre si l'on applique la méthode de Newton pour minimiser f ? Justifier en calculant une itération de la méthode de Newton.

7. Écrire les fonctions Scilab `function [v]=objectif(x)` et `function [g]=gradient_obj(x)` qui calculent $f(x)$, reps. $\nabla f(x)$.

Exercice 2

Un signal, émis par une source de position inconnue $x \in \mathbb{R}^2$, est reçu par m récepteurs de positions connues $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{R}^2$. Grâce à l'intensité du signal, on obtient pour chaque récepteur y_j une estimation (bruitée) de la distance $\|x - y_j\|_2$.
On veut déterminer la position x de la source à partir des données observées (y_j, d_j), pour cela on introduit les fonction définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{k} \left(\|x - y_j\|_2^2 - d_j^2 \right)^2 \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sum_{j=1}^{k} \left| \|x - y_j\|_2 - d_j \right| .$$

1. Justifier que $x^\star = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min}\, f_1(x) = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min}\, f_2(x)$.
   Les deux fonctions peuvent donc servir à trouver la solution du problème, pourquoi choisir f_1 ?

2. Que peut-on dire du problème $x^\star = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min}\, f_1(x)$ en termes d'unicité ?

3. Calculer $\nabla f_1(x)$.

Exercice 3

Soit $f(x) = f(x_1, x_2) = e^{x_1 + x_2} + e^{-x_1 + x_2} + e^{-x_2}$, pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer $\nabla f(x)$.

2. Montrer qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(x^*) = O$. Déterminer x^*.

3. Calculer $H_f(x)$.

4. Justifier que x^* est l'unique minimum de f.