MASTER 1 INFO 2019–2020

Optimisation Algorithmique

Examen du 7 janvier 2019, durée 2h

Tout document est interdit.
Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.
Nombre de pages de l'énoncé : 2
Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.

Questions de cours

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, on note $\nabla f(x)$ le gradient de f au point x et $H_f(x)$ la matrice hessienne de f en $x \in \mathbb{R}^2$.

On suppose qu'il existe un minimum unique $x^* = \arg\min_x f(x)$ que l'on veut déterminer numériquement.

1. Donnez la définition de direction de descente en un point x. Expliquez grâce à la dérivée directionnelle de f en x.
2. On rappelle qu'une méthode itérative qui permet de calculer la suite $(x^{(k)})$ est d'ordre $r > 1$ s'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour k suffisamment grand
$$\frac{\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\|}{\left\|x^{(k)} - x^*\right\|^r} \leq C\ .$$
Comment définit on la précision $prec(k)$? que représente cette quantité ?
Donner une majoration de $prec(k+1)$ par $prec(k)$ pour une méthode d'ordre 2.
Expliquez le résultat grâce à un exemple où $prec(0) = 1$.
3. Comparez les méthodes de descente du gradient, méthode de Newton et gradient conjugué en termes de convergence, vitesse de convergence et complexité.

Exercice 1

Soit $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\Big((x_1 + x_2)^2 + 99(x_1 - x_2)^2\Big)$.

1. Que vaut $x^* = \arg\min_x f(x)$?
2. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$ au point $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}^2$ donné, déterminer la direction de la plus grande pente d en x.
4. Au point $x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{98}{100} \\ 1 \end{pmatrix}$, déterminer la direction de la plus grande pente $d^{(0)}$. Que peut-on dire de $d^{(1)}$? Conclure sur la convergence.

5. Au point $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, déterminer la direction de la plus grande pente $d^{(0)}$. Calculer dans ce cas le pas σ^* pour lequel $f(x^{(0)} + \sigma d^{(0)})$ est minimal. En déduire $x^{(1)}$. Conclusion.

6. Dans cet exemple la méthode de Newton converge en combien d'itérations ? et la méthode du gradient conjugué linéaire ? Expliquez.

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x) = f(x_1, x_2) = e^{x_1} + e^{-x_1} + e^{x_2} + e^{-x_2}$.

1. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$.

2. Déterminer les points critiques de f. Que peut-on dire du problème $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$?

3. Au point $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer la direction de la plus grande pente $d^{(0)}$. Calculer dans ce cas le pas σ^* pour lequel $f(x^{(0)} + \sigma d^{(0)})$ est minimal. En déduire $x^{(1)}$. Conclusion.

4. Calculer $H_f(x)^{-1}$ et donner $x^{(1)}$ obtenue par la méthode de Newton pour $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$.
   $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. que peut-on dire de la convergence de la méthode de Newton ?