Université Paris Descartes
**UFR de Mathématiques et Informatique**
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

**MASTER I INFO 2013–2014**

# Optimisation et Algorithmique

## EXAMEN, durée 2h

***Tout document est interdit.***
***Tout appareil électronique, même à titre d'horloge, est également interdit.***
***Nombre de pages de l'énoncé : 2***
***Il faut justifier les réponses. Il sera tenu compte de la rédaction de la copie.***

### Questions de cours

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, on note $\nabla f(x)$ le gradient de $f$ au point $x$ et $H_f(x)$ la matrice hessienne de $f$ en $x \in \mathbb{R}^2$.
On suppose qu'il existe un minimum unique $x^* = \arg\min_x f(x)$ et l'on note $(x^{(\mathrm{k})})_{k\in\mathbb{N}} = \left({x_1}^{(\mathrm{k})}, {x_2}^{(\mathrm{k})}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $x^* \in \mathbb{R}^2$ quand $k$ tend vers l'infini.

1. Sous quelles condition(s) un vecteur $d \in \mathbb{R}^2$ est une direction de descente de $f$ en $x \in \mathbb{R}^2$ ?
2. Que doit vérifier le scalaire $\sigma$ que l'on appelle pas de descente ?
3. Pour déterminer le pas de descente $\sigma$ de $f$ en $x$ dans la direction $d$ on utilise souvent le "backtracking". Décrire de quoi il s'agit. Donner un bout de code Scilab qui implémente cette méthode.
4. Donner l'algorithme de descente général appliqué à la fonction $f$ (pseudo code).
5. Donner l'algorithme de descente de gradient appliqué à la fonction $f$ (pseudo code).
6. Donner l'algorithme de Newton appliqué à la fonction $f$ (pseudo code).
7. Comparez les avantages et inconvénients de ces deux méthodes.
   En particulier, tracez en fonction du nombre d'itérations $k$, la précision $-\log_{10}\|x^* - x^{(\mathrm{k})}\|$ où la suite $(x^{(\mathrm{k})})$ est obtenue par une descente de gradient, resp. la méthode de Newton.
   Commentez.

### Exercice 1

Soit $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$.

1. Que vaut $x^* = \arg\min_x f(x)$ ?
2. Calculer $\nabla f(x)$ et $H_f(x)$ au point $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
3. Au point $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vérifier que $d^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une direction de descente.
4. Déterminer le pas $\sigma_0$ qui minimise $f$ le long de cette direction.
   (Indic. : poser $\varphi(\sigma) = f(x^{(0)} + \sigma d^{(0)})$ et minimiser $\varphi$ sur $\mathbb{R}_+^*$).

   Calculer ensuite $f(x^{(1)})$. Conclusion ?

5. Tracer la ligne de niveau de $f$ qui passe par $x^{(0)}$, placez les points $x^*$, $x^{(0)}$ et le vecteur $d^{(0)}$.

6. On garde le même point initial $x^{(0)}$ mais l'on prend $d^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)})$.
   Déterminer alors $\sigma_0$, $x^{(1)}$ et $f(x^{(1)})$, comme dans 4. Commentez.

7. Montrer que, indépendamment de $x^{(0)}$, la méthode de Newton converge en une itération.
   Expliquez.

**Exercice 2**

On considère la fonction `Scilab` suivante, où `x0` et `b` sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et `A` est une matrice carrée, définie positive de taille $n$.

```
1    function [x_h,v_h] = toto(x0,A,b)
2       MAX = 500;
3       epsilon = 1e-10;
4       x_h = [ ];
5       v_h = [ ];
6       x = x0;
7       s = 0;
8
9       for k=1:MAX
10        v = 0.5.*(x'*A*x)-b'*x;
11        d = -(A*x-b);
12        n =  sqrt(d'*d);
13
14        x_h = [x_h , x];
15        v_h = [v_h , v];
16
17        if (n<epsilon) then
18          mprintf("\n   %i  \n",k);
19          return;
20        end;
21        s = (n*n)/(d'*A*d) ;
22        x = x+s*d;
23      end;
24      mprintf("\n   %i  \n",MAX);
25   endfunction;
```

1. Que calcule cette fonction ? Expliquez l'affichage et les sorties `x_h` et `v_h`.

2. Expliquez les lignes 17 à 19 et le calcul de `s` (ligne 21) .