



UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Maîtrise d'Ingénierie Mathématique

# ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Définitions . . . . .	1
1.2	Notions de solution . . . . .	4
1.3	Exemples d'équations aux dérivées partielles . . . . .	6
1.3.1	Physique . . . . .	6
1.3.2	Biologie. Dynamique des populations . . . . .	6
1.3.3	Traitement des images . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Les équations aux dérivées partielles linéaires classiques</b>	<b>15</b>
2.1	Équation de transport . . . . .	15
2.1.1	Modélisation . . . . .	15
2.1.2	Résolution pour $d = 1$ . . . . .	16
2.1.3	Résolution du cas général . . . . .	17
2.2	Équation de Laplace, équation de Poisson . . . . .	18
2.2.1	Modélisation : membrane élastique . . . . .	18
2.2.2	Résultats d'unicité . . . . .	19
2.2.3	Formules de représentation . . . . .	20
2.2.4	Régularité des fonctions harmoniques . . . . .	21
2.2.5	Principe du maximum . . . . .	22
2.2.6	Fonctions de Green . . . . .	22
2.2.7	Principe de Dirichlet . . . . .	24
2.3	Équation de la chaleur . . . . .	25
2.3.1	Modélisation . . . . .	25
2.3.1.1	Équations de réaction-diffusion . . . . .	25
2.3.1.2	Équations d'advection-diffusion . . . . .	27
2.3.2	Calcul d'une solution . . . . .	28
2.3.3	Principe du maximum et unicité . . . . .	30
2.3.4	Régularité sur un domaine borné . . . . .	32
2.4	Équation des ondes . . . . .	33
2.4.1	Modélisation . . . . .	33
2.4.1.1	Membrane vibrante . . . . .	33
2.4.1.2	Ondes acoustiques . . . . .	34
2.4.2	Équation des ondes dans $\mathbb{R}$ . . . . .	36
2.4.3	Méthode des moyennes sphériques ( $d \geq 2$ ) . . . . .	38
2.4.4	Équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	39
2.4.5	Équation des ondes dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	41
2.4.6	Méthode de Duhamel pour l'équation des ondes non homogène . . . . .	42
2.5	Classification des e.d.p. linéaires d'ordre 2 . . . . .	44

<b>3</b>	<b>Équations aux dérivées partielles d'ordre un</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction et notations . . . . .	47
3.2	Étude du cas général . . . . .	48
3.3	Cas linéaire et quasilinéaire . . . . .	50
3.4	Lois de conservation scalaires . . . . .	51
3.4.1	Modélisation . . . . .	51
3.4.2	Étude de l'équation de Burger's . . . . .	52
3.4.3	Solutions faibles et chocs . . . . .	54
3.4.4	Application : modèle de trafic routier . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Introduction aux éléments finis</b>	<b>59</b>
4.1	Espaces de Sobolev . . . . .	59
4.2	Formulation faible d'un problème elliptique linéaire . . . . .	61
4.3	Éléments finis rectangulaires . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Schémas aux différences finies</b>	<b>67</b>
5.1	Introduction . . . . .	67
5.2	Convergence, consistance et stabilité . . . . .	69
5.2.1	Définitions . . . . .	69
5.2.2	Condition de Courant-Friedrichs-Lewy . . . . .	73
5.3	Analyse de stabilité de von Neumann . . . . .	74
5.4	Équations paraboliques . . . . .	83
5.5	Applications . . . . .	85
5.5.1	Équation d'advection-diffusion-réaction . . . . .	85
5.5.2	Équation de la chaleur . . . . .	88
5.5.3	Système de réaction-diffusion . . . . .	94
<b>A</b>	<b>Calcul différentiel et intégration dans <math>\mathbb{R}^d</math></b>	<b>99</b>
A.1	Notations . . . . .	99
A.2	Calcul différentiel . . . . .	100
A.3	Intégration dans $\mathbb{R}^d$ . . . . .	101
<b>B</b>	<b>Géométrie différentielle élémentaire. Intégrale de surface</b>	<b>103</b>
B.1	Variétés dans $\mathbb{R}^d$ . . . . .	103
B.2	Espace tangent. Orientation d'une variété . . . . .	106
B.3	Intégrale de surface . . . . .	111
<b>C</b>	<b>Éléments d'analyse vectorielle</b>	<b>115</b>

Avertissement : ces notes sont un support et complément du cours magistral, des travaux dirigés et pratiques. Leur contenu n'est pas équivalent au cours enseigné, en particulier les examens et contrôles se réfèrent au cours enseigné uniquement.

### Bibliographie.

Les livres suivants peuvent compléter les rappels présentés en annexe :

- H. CARTAN, *Cours de calcul différentiel*, Hermann 1997 ;
- D. REVUZ, *Mesure et intégration*, Hermann 1997.

Des références générales sur les équations aux dérivées partielles sont :

- F. JOHN, *Partial Differential Equations*, Springer, 4ème édition 1982 ;
- W. STRAUSS, *Partial Differential Equations : An Introduction*, Wiley 1992.

Pour l'étude des espaces de SOBOLEV et la méthode des éléments finis on pourra consulter :

- H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle*, Masson 1987 ;
- P.A. RAVIART et J.M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson 1992.

Les références suivantes ont été utiles pour la rédaction de ce cours mais leur contenu dépasse souvent le cadre d'un cours de maîtrise :

- L.C. EVANS, *Partial Differential Equations*, AMS 1998 ;
- G. FOLLAND, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press 1976 ;
- R. LEVEQUE, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser 1992 ;
- I.G. PETROVSKY, *Lectures on Partial Differential Equations*, Wiley 1954 ;
- J.C. STRIKWERDA, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Wadsworth & Brooks 1989 ;
- M. TAYLOR, *Partial Differential Equations*, Vol. I, Springer 1996.

Un recueil très complet de modèles mathématiques en biologie est le livre :

- J.D. MURRAY, *Mathematical Biology*, Springer 1993.

Enfin pour les applications en traitement des images on pourra consulter :

- F. GUICHARD et J.M. MOREL, *Image Analysis and Partial Differential Equations*, à paraître chez Birkhäuser.

Cette liste ne peut être exhaustive : de nombreux livres traitent des équations aux dérivées partielles et de leurs applications.



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Définitions

Soit  $u$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^d$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et suffisamment régulière pour que les expressions qui suivent aient un sens.

Une *équation aux dérivées partielles (e.d.p.)* pour la fonction  $u$  est une relation entre  $u$ , les variables  $x_1, \dots, x_d$  et un nombre fini de dérivées partielles de  $u$ ,

$$F(x_1, \dots, x_d, u, D_1u, \dots, D_du, D_1D_1u, D_1D_2u, \dots, D^\alpha u, \dots) = 0,$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  (voir annexe A.1 pour les notations).

On dit que  $u$  est *solution de l'équation aux dérivées partielles dans*  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  si, après substitution de  $u$  et de ses dérivées partielles,  $F$  s'annule pour tout  $(x_1, \dots, x_d) \in \Omega$ .

L'*ordre*  $m \in \mathbb{N}$  d'une équation aux dérivées partielles est celui de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.

Un *système d'équations aux dérivées partielles* est formé de plusieurs équations aux dérivées partielles impliquant une ou plusieurs fonctions inconnues  $u_i$ .

Une équation aux dérivées partielles est *linéaire* si  $F$  est linéaire par rapport à  $u$  et ses dérivées partielles. Si  $m$  est l'ordre de l'équation aux dérivées partielles, l'équation est de la forme

$$\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u(x) = B(x),$$

Si  $B = 0$  on a une équation *homogène* et  $Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha D^\alpha u$  est un *opérateur différentiel linéaire*.

Propriétés :

1. si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaire homogène, alors pour  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  des réels quelconques,  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$  est aussi solution ;
2. si  $u_h$  est solution de l'équation linéaire homogène et  $u_p$  est solution de l'équation linéaire non homogène, alors  $u_h + u_p$  est solution de l'équation complète.

Une équation aux dérivées partielles d'ordre  $m$  est *quasilinéaire* si  $F$  est linéaire en toutes les dérivées partielles d'ordre le plus élevé, *i.e.* d'ordre  $m$ , l'équation est alors de la forme

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, u, D^\beta u) D^\alpha u(x) = B(x, u, D^\beta u), \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{N}^d \text{ et } |\beta| < m.$$

Une équation aux dérivées partielles est *semilinéaire* si l'équation est de la forme

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) D^\alpha u(x) = B(x, u, D^\beta u), \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{N}^d \text{ et } |\beta| < m.$$

La solution d'une équation aux dérivées partielles d'ordre  $m$  dépend en général de  $m$  fonctions arbitraires de  $d - 1$  variables.

La *solution générale* d'une équation aux dérivées partielles est celle qui permet de trouver toutes les solutions de l'équation (sauf des cas de solutions singulières) en donnant des valeurs particulières aux fonctions arbitraires.

**Exemples :** (i)  $u_x(x, y) = 0$  (ii)  $u_{xx} = 0$  (iii)  $u_{xx} + u = 0$ .

Pour trouver des solutions particulières d'une équation aux dérivées partielles, à partir de la solution générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions. Les contraintes les plus fréquentes sont :

1. conditions initiales : si  $u$  est fonction de  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  on donne  $u(x, t_0) = \Phi_0(x)$  ou  $D_2^p u(x, t_0) = \Phi_p(x)$ , on parle aussi de *conditions de CAUCHY* ;
2. conditions au bord : si  $u$  est fonction de  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$  on a trois types de contraintes :
  - *conditions de DIRICHLET* où  $u$  est fixé sur le bord de  $\Omega$  :  $u|_{\partial\Omega} = g$  ;
  - *conditions de NEUMANN* où la dérivée normale de  $u$  est fixé :  $\frac{du}{dn}\Big|_{\partial\Omega} = g$  ;
  - *conditions de ROBIN* ou mixtes :  $c(x)u + \tilde{c}(x)\frac{du}{dn} = g$  sur  $\partial\Omega$  ;
 si  $g = 0$  on a des *conditions homogènes* au bord ;
3. conditions à l'infini : si  $\Omega$  n'est pas borné on a des conditions de la forme  $u(x) \sim \Phi(x)$  quand  $|x| \rightarrow \infty$  ou  $\|u\|_2 < \infty$  ;
4. conditions sur les interfaces : si  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , avec  $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ , et si l'on a déterminé  $u$  sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , alors pour pouvoir définir  $u$  sur  $\Omega$  on a des conditions sur  $u$ , resp.  $\frac{du}{dn}$ , sur  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ .

**Remarques :** Les contraintes sont en général imposées par la nature du problème que l'on essaye de modéliser, l'équation aux dérivées partielles et ses conditions restrictives seront donc *a priori* cohérentes.

De façon générale une équation aux dérivées partielles ne donne lieu à un problème raisonnable que si on l'associe à un certain type de conditions restrictives, par exemple des

conditions initiales pour des problèmes d'évolution (équation de la chaleur, équation des ondes) ou des conditions au bord pour l'équation de LAPLACE.

**Exemples :**

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = \Phi(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt}(x, t) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = \Phi_0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \Phi_1(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x(x, y) = 0 & \text{sur } \Omega = [0, 1]^2 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \quad \begin{cases} u_x(x, y) = 0 & \text{sur } \Omega = [0, 1]^2 \\ \left. \frac{du}{dn} \right|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t(x, t) + u_x(x, t) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = -x^2 & \text{pour } x < 0 \\ u(x, 0) = x^2 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

## Problèmes bien posés

Considérons une équation aux dérivées partielles sur un domaine  $\Omega$  avec éventuellement des conditions auxiliaires sur la solution, on dit que *le problème est bien posé* si on a

- existence d'une solution du problème ;
- unicité de cette solution ;
- stabilité par rapport aux données du problème.

Si la solution change beaucoup quand les données changent peu on dit que le problème est *sensible aux données*.

**Exemple :** Le problème de CAUCHY pour l'équation de LAPLACE est un problème instable, ceci est montré par l'exemple de HADAMARD :

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ D_2 u(x, 0) = n^{-k} \sin(nx) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^* ; .$$

On montre que  $u(x, y) = \frac{1}{n^{k+1}} \sin(nx) \sinh(ny)$  est une solution du problème et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|D_2^p u(x, 0)| \leq n^{p-1-k}$  ( $p=1, \dots, k$ ).

Si par ailleurs  $u_1$  est solution du problème  $\begin{cases} \Delta u_1(x, y) = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u_1(x, 0) = \phi_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ D_2 u_1(x, 0) = \phi_1(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}$

alors  $u_2(x, y) = u_1(x, y) + \frac{1}{n^{k+1}} \sin(nx) \sinh(ny)$  est une solution du problème de CAUCHY de conditions initiales  $u_2(x, 0) = \phi_0(x)$  et  $D_2 u_2(x, 0) = \phi_1(x) + n^{-k} \sin(nx)$ .

Les conditions initiales sont donc arbitrairement proches mais les solutions  $u_1$  et  $u_2$  sont arbitrairement éloignées, pour  $y > 0$  quelconque (petit).

## 1.2 Notions de solution

Soit  $u$  la solution d'un problème bien posé.

Dans ce qui précède on n'a pas précisé la régularité de  $u$ , on a seulement supposé que  $u$  était suffisamment différentiable pour que les équations aient un sens, par exemple  $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$  si  $u$  est solution d'une équation aux dérivées partielles d'ordre  $m$ .

On dit alors que  $u$  est une *solution au sens fort* de l'équation aux dérivées partielles.

Dans beaucoup de cas un problème n'admet pas de solutions régulières : l'équation des ondes avec conditions initiales non continues, les lois de conservation scalaires qui génèrent des ondes de choc.

Pour que le problème soit bien posé il faut élargir l'ensemble des  $u$ , par exemple admettre des solutions non continues. On doit transformer le problème de façon à lui garder un sens pour des fonctions non différentiables, on parle de *formulation faible* du problème.

Pour une solution forte il y a équivalence entre la formulation faible et le problème initial.

Une solution du problème faible est appelée *solution faible* ou *solution généralisée*.

Il est souvent plus facile de trouver une solution faible et de montrer *a posteriori* qu'elle est régulière, c'est-à-dire que l'on a bien une solution forte.

Le choix de solution généralisée ( $\mathcal{C}^0, L^1, \dots$ ) dépend fortement du problème traité, de façon générale on peut travailler dans le cadre des distributions de L. SCHWARTZ.

On verra plus tard d'autres espaces de solutions généralisées.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  on définit

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \left\{ \text{fonctions de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ à support compact } K \subset \Omega \right\},$$

c'est l'ensemble des *fonctions tests*. L'espace des *distributions sur*  $\Omega$  est le dual topologique  $\mathcal{D}'(\Omega)$  des formes linéaires continues sur  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

### Exemples :

1. Soit  $x \in \mathbb{R}^d$  on définit  $\delta_x$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  par  $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$ .
2. Soit  $f \in L_{loc}^p(\Omega) = \left\{ f \in L^p(K) \text{ pour tout compact } K \subset \Omega \right\}$ ,  
alors  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  et, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  :

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

Sans donner de détails sur la topologie des espaces  $\mathcal{D}(\Omega)$  et  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , on rappelle quelques résultats de la théorie des distributions :

- soit  $(T_k)_k$  une suite de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , alors  $T_k \rightarrow T$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  si pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  :  
 $\langle T_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$  ;
- soit  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ , on définit  $D^\alpha T$  par  $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  ;

- soit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  l'espace des distributions tempérées, *i.e.* le dual de l'espace de SCHWARTZ  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  des fonctions à décroissance rapide :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) / \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d : |x^\alpha D^\beta f(x)| \text{ est borné} \right\}.$$

Pour  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  on a  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  avec  $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i x \cdot \xi} dx$ .

Pour  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  on définit sa transformée de FOURIER par  $\langle \widehat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

En particulier  $\widehat{D^\alpha T}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{T}(\xi)$ .

**Exemples :**  $\widehat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$ ,  $\widehat{D^\alpha \delta} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha$  et  $\widehat{\delta_{x_0}} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp(-i \xi \cdot x_0)$ .

### Application :

Considérons l'opérateur différentiel linéaire  $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ , où les  $a_\alpha$  sont  $\mathcal{C}^\infty$ .

Si  $u$  et  $v$  sont dans  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$  on a une généralisation de la formule de GREEN (cf. annexe C) :

$$\int_{\Omega} v L(u) dx = \int_{\Omega} \widetilde{L}(v) u dx + \int_{\partial\Omega} M(u, v, n) dS,$$

où  $\widetilde{L}(v) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x) v)$  et  $n$  est le vecteur normal unité extérieur à  $\Omega$ .

Si  $L = \Delta$  on a la seconde identité de GREEN et alors  $\widetilde{L} = \Delta$ .

Si  $v$  est à support compact dans  $\Omega$  on a  $M = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on dit que  $\widetilde{L}$  est l'*adjoint* de  $L$ . Pour une distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  on définit  $L(T)$  par  $\langle L(T), \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{L}(\varphi) \rangle$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

On dit que  $T$  est une *solution fondamentale de pôle  $x_0$*  pour  $L$  si  $L(u) = \delta_{x_0}$ .

Si à une solution fondamentale,  $T$ , on ajoute une solution forte,  $w \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ , de l'équation homogène,  $L(w) = 0$ , on obtient encore une solution fondamentale.

**Exemple :** La fonction  $u(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x_1 > x_1^0, x_2 > x_2^0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

est une solution fondamentale de pôle  $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$  pour  $L = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.3 Exemples d'équations aux dérivées partielles

### 1.3.1 Physique

Sans rentrer dans les détails et en négligeant les constantes dimensionnelles, citons quelques équations aux dérivées partielles «célèbres» de la physique :

- $\Delta u = 0$  équation de LAPLACE
- $\Delta u - f = 0$  équation de POISSON
- $u_t - \Delta u = 0$  équation de la chaleur, diffusion homogène
- $u_{tt} - \Delta u = 0$  équation des ondes
- $u_{tt} - u_{xx} + u_t + u = 0$  équation des télégraphistes
- $u_t + cuu_x + u_{xxx} = 0$  équation de KORTEWEG-DE VRIES pour des vagues sur de l'eau peu profonde
- $i\Psi_t + \Delta\Psi = V\Psi$  équation de SCHRÖDINGER

et des systèmes d'équations aux dérivées partielles :

- $\begin{cases} E_t = \text{rot}(H) \\ H_t = -\text{rot}(E) \\ \text{div}(E) = \text{div}(H) = 0 \end{cases}$  équations de MAXWELL pour le champ électrique  $E$  et le champ magnétique  $H$
- $\begin{cases} U_t + (U \cdot \nabla)U - \Delta U = -\nabla p \\ \text{div}(U) = 0 \end{cases}$  équations de NAVIER-STOKES d'un fluide incompressible et visqueux

### 1.3.2 Biologie. Dynamique des populations

Dans les modèles en biologie ou en dynamique des populations on s'intéresse à la concentration d'une substance chimique ou à la densité d'une population (particules, cellules) et son évolution au cours du temps. L'inconnue  $u$  est en général fonction de  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ .

- L'équation de FISHER (1937), pour  $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , est un modèle de dispersion en une dimension spatiale d'un gène favorable dans une population

$$u_t = k\Delta u + ru \left(1 - \frac{u}{C}\right),$$

le terme de *croissance logistique* dépend de la constante de reproduction linéaire  $r$ , de la capacité de l'environnement  $C$ , et du coefficient de dispersion de la population,  $k$ .

- Les équations de FITZHUGH-NAGUMO

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u) - v \\ v_t = \delta v_{tt} + \alpha u - \beta v \end{cases} \quad \text{pour } \delta, \alpha, \beta \text{ dans } \mathbb{R}_+$$

utilisées pour modéliser la transmission d'impulsion nerveuses le long d'axones ou des réactions chimiques cycliques du type BELOUSOV-ZHABOTINSKY.

- Les deux équations précédentes sont des équations de type *réaction-diffusion*.

Les équations de réaction-diffusion ont été proposées par A. TURING (1952) pour la modélisation de phénomènes de *morphogenèse* (*i.e.* développement des formes/structures). Un modèle d'interaction d'espèces ou de substances chimiques est donné par le système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \operatorname{div}(D_i \nabla u_i) + Q_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n,$$

où  $u_i(x, t)$  représente la densité, resp. la concentration, de la substance  $i$ . Les matrices de diffusion  $D_i$  et les termes de réaction  $Q_i$  peuvent dépendre de  $(x, t)$  et des concentrations  $u_i$ , de façon non linéaire.

Le terme de réaction  $Q_i$  modélise l'interaction des substances (inhibition, catalyse) et le terme  $\operatorname{div}(D_i \nabla u)$  représente la diffusion de la substance à travers le système.

En fonction du choix de  $D_i$  et  $Q_i$ , les concentrations  $u_i$  peuvent donner lieu à des motifs locaux : on modélise ainsi la pigmentation des coquillages, le pelage des animaux (zèbre, guépard, ...), cf. MEINHARDT (page 94), et des réactions chimiques cycliques, cf. BELOUSOV-ZHABOTINSKY.

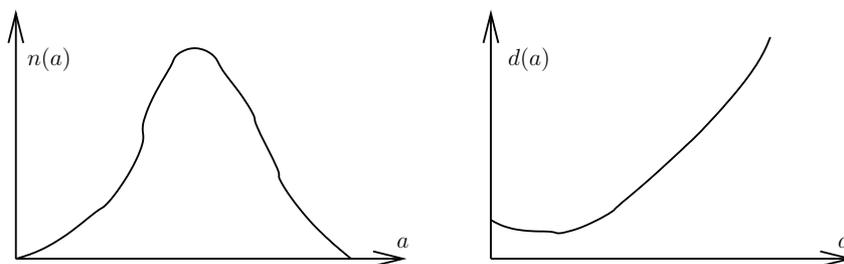
En *synthèse d'images* des chercheurs ont utilisé ce modèle pour créer des textures naturelles.

- L'équation de VON FOERSTER

$$\begin{cases} u_a + u_t = -d(a)u & a > 0, t > 0 \\ u(a, 0) = f(a) & a > 0 \\ u(0, t) = \int_0^{+\infty} n(a)u(a, t) da & t > 0 \end{cases}$$

où  $u(a, t)$  est la densité de population d'âge  $a$  à l'instant  $t$ ,  $n(a)$  est le taux de naissances,  $d(a)$  le taux de décès et  $f(a)$  la distribution initiale de la population.

Les graphes de  $n(a)$  et  $d(a)$  ont l'allure indiquée en dessous.



Exercice : interprétez l'équation aux dérivées partielles, la condition initiale et la condition au bord du modèle.

### 1.3.3 Traitement des images

Une image numérique scalaire est une matrice  $I(c, l)_{0 \leq c < NC, 0 \leq l < NL}$  où à chaque ligne  $l$  et colonne  $c$  on fait correspondre un niveau de gris  $I(c, l) \in \{0, \dots, 255\}$ ,  $(c, l)$  est un *pixel* (angl. picture element)

Suite à des problèmes de capteurs, de transmission ou autres, l'image peut être endommagée, c'est-à-dire que les valeurs en certains pixels ont été modifiées ou détruits. Le but des techniques de *débruitage* que nous allons exposer est d'éliminer ce *bruit* tout en préservant le maximum d'information contenu dans l'image originale.

On va modéliser une image par une fonction  $u$  définie sur un rectangle ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $u(x, y) \in \mathbb{R}$  si l'on se restreint à des images en niveaux de gris.

En traitement du signal on utilise les filtres linéaires passe-bas pour enlever le bruit (*i.e.* les hautes fréquences) d'un signal. Le filtre gaussien est un filtre linéaire qui est souvent utilisé car il a une bonne localisation en espace et en fréquence.

Soit  $u_o$  l'image originale bruitée et, pour  $x \in \mathbb{R}^2$ , posons  $G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}$ .

On calcule le résultat du filtrage de  $u_o$  par le filtre gaussien :

$$(G_\sigma \star u_o)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} G_\sigma(x - y)u_o(y) dy.$$

La valeur de  $\sigma > 0$  indique la taille spatiale des structures éliminées par le filtrage : plus  $\sigma$  est grand, plus on lisse et plus on perd de détails.

Or on montre que la convolution avec la Gaussienne  $G_\sigma$  consiste à faire évoluer l'image originale suivant l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ u(x, 0) = u_o(x, y). \end{cases}$$

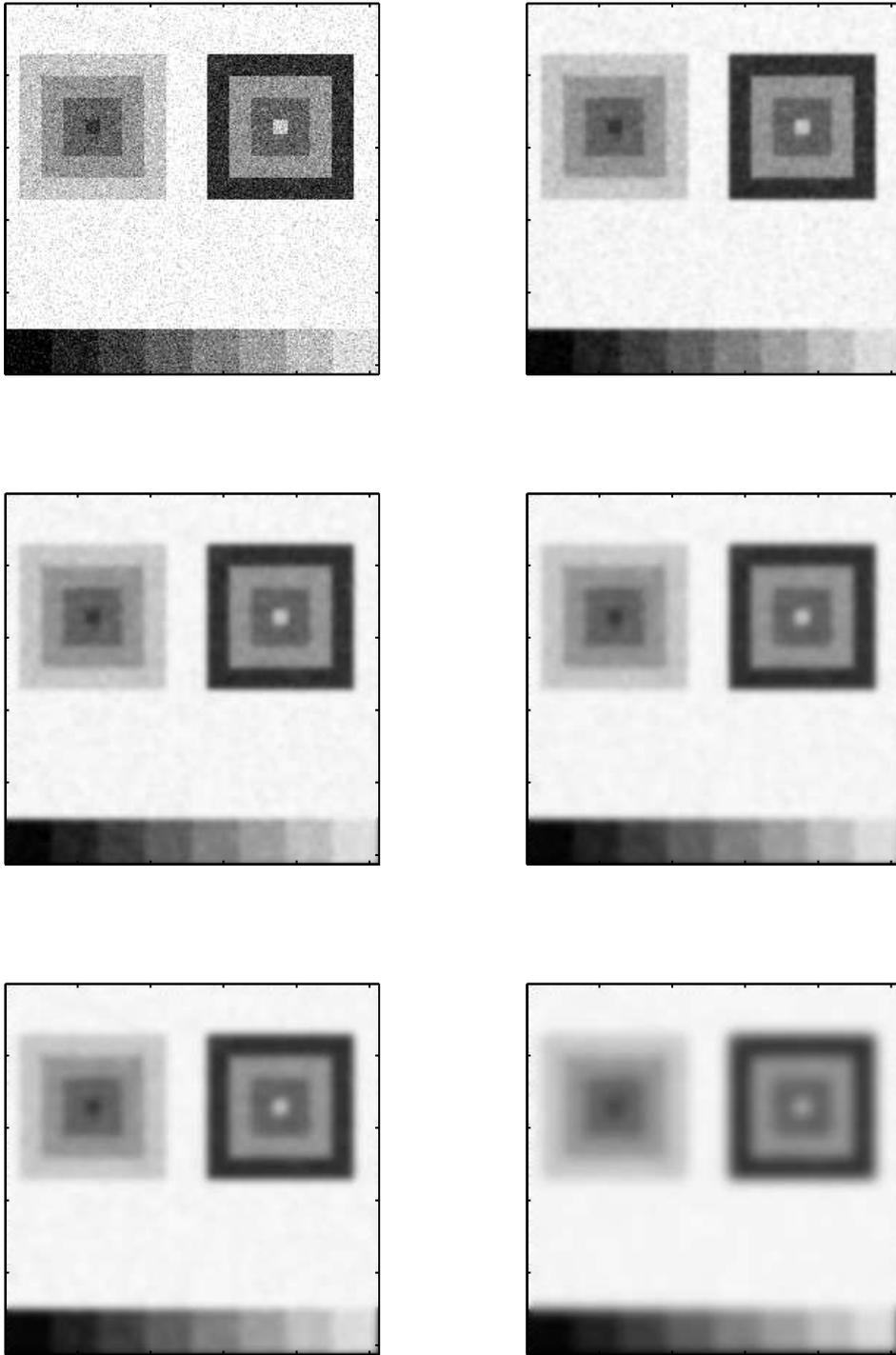
Les propriétés de régularisation de la convolution par  $G_\sigma$  s'interprètent donc en termes de *diffusion isotrope* et le temps  $t$  est lié à la l'échelle spatiale  $\sigma$  par  $t = \sigma^2/2$ .

La diffusion isotrope s'obtient en prenant une moyenne glissante pondérée qui a tendance à éliminer les pixels bruités mais qui rend flou les contours des objets de l'image.

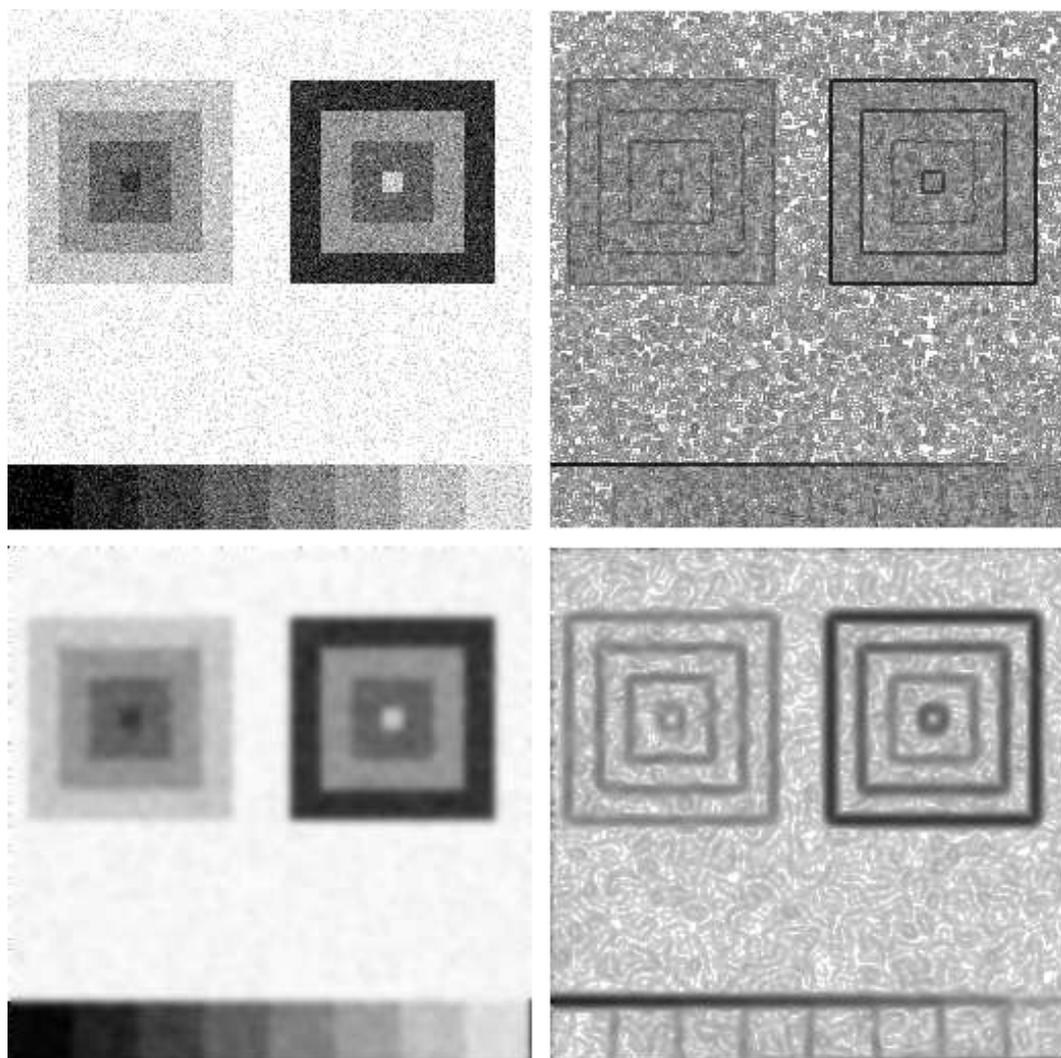
Sur la figure de la page suivante on a représenté quelques étapes de la diffusion isotrope d'une image bruitée.

Pour éviter la destruction de contours on préfère appliquer une *diffusion anisotrope*, c'est-à-dire que l'on va lisser l'image partout, sauf au-delà des bords d'objets. Cette méthode nécessite donc deux étapes. On doit d'abord détecter les contours et autres structures fines de l'image, ensuite on va lisser l'image en ne considérant que des voisinages de pixels qui ne traversent pas les bords.

On modélise ce comportement par exemple par les équations aux dérivées partielles non linéaires (1.1) et (1.2), présentées plus loin.



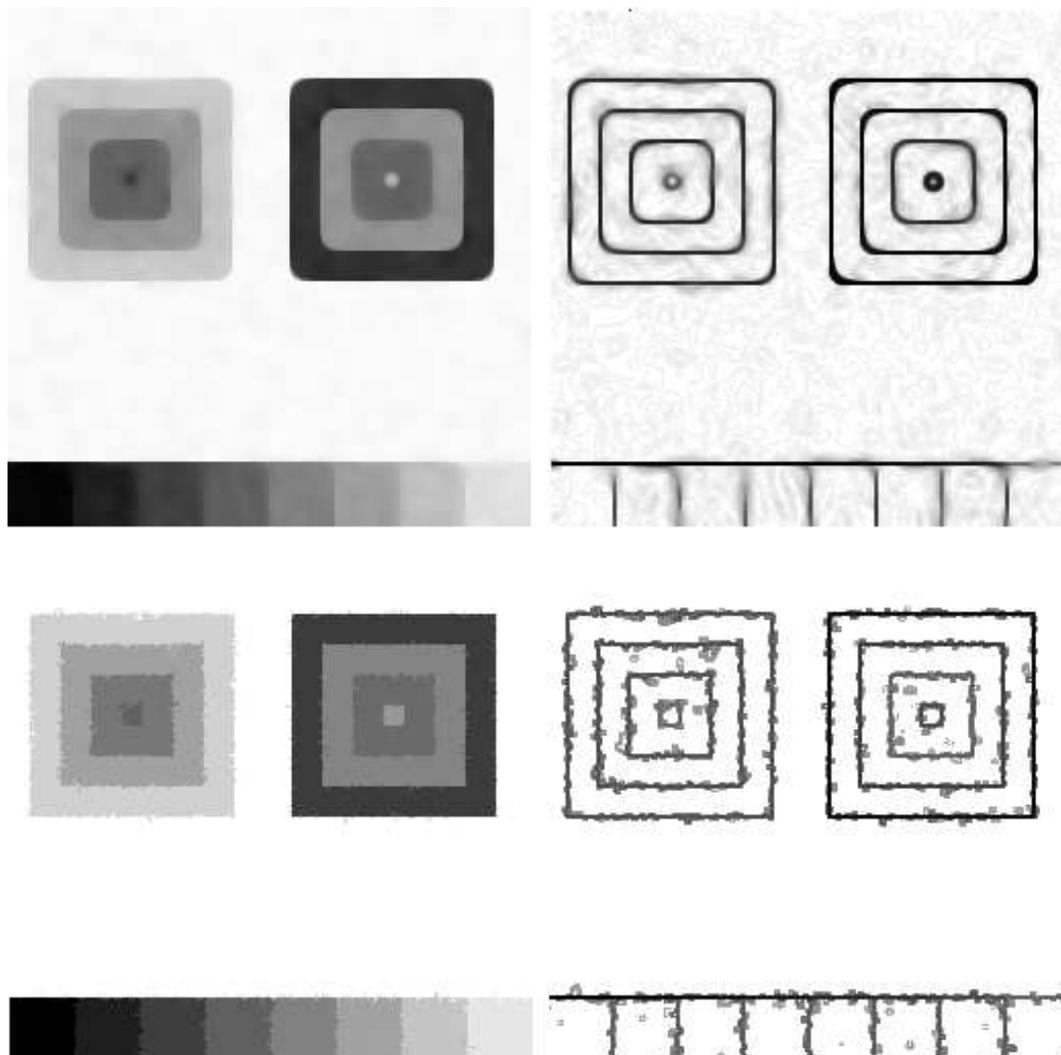
Itérations du Laplacien sur une image bruitée  
De haut en bas et de gauche à droite :  $t = i \Delta t$  pour  $i = 0, \dots, 5$ .



En haut à gauche une image bruitée  $u$  et en haut à droite une détection de bord par gradient discret  $|\nabla u|$ . Ici un gradient fort est représenté en noir et un gradient nul est blanc (*i.e.* inversion vidéo).

En bas à gauche on a appliqué l'équation de la chaleur à  $u$  : on calcule la solution de l'équation aux dérivées partielles à l'instant  $t$ , ceci revient à faire la convolution de  $u$  avec  $G_{\sqrt{2t}}$ .

En appliquant le gradient à cette image lissée on obtient l'image de droite  $|\nabla G_{\sqrt{2t}} * u|$ . On remarquera l'épaisseur des bords obtenus.



En haut à gauche on a représenté un lissage obtenu par une technique non linéaire modélisée par l'équation aux dérivées partielles, dite de la *mean curvature motion*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad \text{avec } u(x, 0) = u_o(x). \quad (1.1)$$

En appliquant le gradient on remarque que les bords sont bien localisés : il reste peu de bruit mais les coins des contours sont arrondis.

En bas à gauche un résultat pour l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad \text{avec } u(x, 0) = u_o(x). \quad (1.2)$$

L'image du gradient montre que le bruit dans les zones homogènes a complètement disparu mais les bords sont irréguliers.

**Interprétation** des équations aux dérivées partielles précédentes :

Dans le repère canonique  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  on note

$$H_u(x, y) = \begin{pmatrix} u_{xx}(x, y) & u_{xy}(x, y) \\ u_{xy}(x, y) & u_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

la matrice associée à la forme bilinéaire symétrique  $d^2u_{(x,y)}$ , c'est la matrice *Hessienne*.

On rappelle que  $\Delta u(x, y) = \text{trace}(H_u(x, y))$  et  $\nabla u(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{pmatrix}$ .

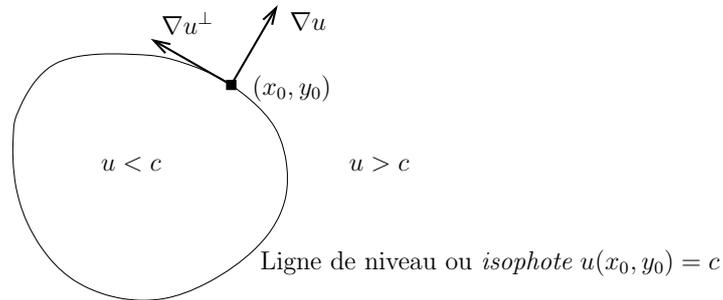
Pour  $\eta$  et  $\xi$  deux vecteurs unitaires quelconques de  $\mathbb{R}^2$ , on note

$$u_\eta \triangleq \frac{du}{d\eta} = \nabla u \cdot \eta \quad \text{et} \quad u_{\eta\xi} \triangleq d^2u(\eta, \xi) = \eta^t H_u \xi.$$

En particulier pour  $\eta = e_1$  et  $\xi = e_2$  on retrouve les dérivées partielles d'ordre un et deux habituelles.

Supposons que  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$  et soit  $c = u(x_0, y_0)$ , pour  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , tel que  $u^{-1}(c)$  ne contient pas de points critiques (par le théorème de SARD ceci est vrai pour presque tout  $c \in \mathbb{R}$ ). En particulier  $|\nabla u(x_0, y_0)| \neq 0$ , le théorème d'inversion locale entraîne alors que par le point  $(x_0, y_0)$  il passe une ligne de niveau unique  $I_c = \{(x, y) / u(x, y) = c\}$ .

L'ensemble d'intensité lumineuse constante  $I_c$  est appelé *isophote*. Sur la figure suivante on a représenté une isophote fermé.



En tout point  $(x, y)$  de  $I_c$  on définit un repère local orthonormé

$$(\eta, \xi)|_{(x,y)} = \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u^\perp}{|\nabla u|} \right)|_{(x,y)},$$

où  $\nabla u^\perp = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$  est le vecteur perpendiculaire direct à  $\nabla u$  en  $(x, y)$ .

Dans le repère local  $(\eta, \xi)$  on a  $u_\xi = \nabla u \cdot \xi = 0$  car  $u$  est constante sur  $I_c$ , tandis que  $\eta$  indique la direction de plus grande croissance de  $u$ ,  $u_\eta = |\nabla u|$ .

Un calcul montre qu'au point  $(x, y) \in I_c$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) &= \frac{1}{|\nabla u|} \left( \Delta u - d^2u \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) \\ &= \frac{u_y^2 u_{xx} + u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy}}{|\nabla u|^3} = \frac{1}{|\nabla u|} d^2u \left( \frac{\nabla u^\perp}{|\nabla u|}, \frac{\nabla u^\perp}{|\nabla u|} \right). \end{aligned}$$

En particulier on remarque que  $\Delta u = d^2u(\eta, \eta) + d^2u(\xi, \xi)$ , on retrouve l'invariance du Laplacien et l'équation de la chaleur s'écrit

$$u_t = u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} .$$

Dans les coordonnées locales  $(\eta, \xi)$  l'équation (1.1) s'écrit

$$u_t = u_{\xi\xi} ;$$

tandis que (1.2) devient

$$u_t = \frac{u_{\xi\xi}}{u_\eta} .$$

On a donc une diffusion dans la direction perpendiculaire au gradient, on ne lisse pas les contours dans une image!

Un modèle qui permet de prendre en compte en chaque point les deux directions  $\eta$  et  $\xi$  a été proposé par MALIK et PERONA :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left( g(|\nabla u|) \nabla u \right) \quad \text{avec } u(x, 0) = u_o(x), \quad (1.3)$$

où le coefficient de diffusion  $g(r)$ ,  $r \geq 0$ , est une fonction régulière positive décroissante avec  $g(0) = 1$ . Dans le repère local  $(\eta, \xi)$  l'équation (1.3) devient :

$$u_t = (g(u_\eta) + u_\eta g'(u_\eta)) u_{\eta\eta} + g(u_\eta) u_{\xi\xi} = G'(u_\eta) u_{\eta\eta} + g(u_\eta) u_{\xi\xi} ,$$

où on note  $G(r) = rg(r)$  l'intensité du flux.

Au points où  $|\nabla u| = u_\eta = 0$  on obtient l'équation de la chaleur isotrope, pour les autres points on obtient une diffusion anisotrope pondérée par les valeurs de  $g$  et  $G'$ .

Si  $G'(u_\eta) = 0$  on a uniquement une diffusion dans la direction perpendiculaire au gradient ;

si  $G'(u_\eta) > 0$  on ajoute une diffusion dans la direction du gradient ;

pour  $G'(u_\eta) < 0$  on a une diffusion inversée instable dans la direction  $\eta$  (voir page 25).

Un exemple classique de coefficient de diffusion est  $g(r) = \frac{1}{\lambda^2 + r^2}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ ,

dans ce cas  $G'(r) = \frac{\lambda^2 - r^2}{(\lambda^2 + r^2)^2}$  et  $\lambda$  est le seuil qui décide du signe de  $G'$ .

Note : Les équations aux dérivées partielles (1.1), (1.2) et (1.3) sont non linéaires et leur étude dépasse le cadre de ce cours. Il faut en particulier définir des solutions faibles adéquates pour pouvoir espérer obtenir des problèmes bien posés.



# Chapitre 2

## Les équations aux dérivées partielles linéaires classiques

### 2.1 Équation de transport

#### 2.1.1 Modélisation

Dans  $\mathbb{R}^d$  on considère un liquide qui évolue à la vitesse  $V(x, t)$  et dans lequel des particules de polluant sont introduit. On note  $u(x, t)$  la concentration des particules de polluant dans le liquide et  $f(x, t)$  la source de polluant. Le champ de vecteurs  $U(x, t) = u(x, t)V(x, t)$  représente le flux de particules de polluant.

On suppose que les particules de polluant sont simplement entraînés par le liquide, *i.e.* il n'y a pas de diffusion du polluant, et  $u$ ,  $f$  et  $V$  sont réguliers.

Posons  $m(t) = \int_{\Omega} u(x, t) dx$  et étudions la variation de la quantité de particules dans  $\Omega$ .

$$m'(t) = \int_{\partial\Omega} u_t(x, t) dx.$$

Or la variation de  $m$  est due à la perte de polluant à travers  $\partial\Omega$  et à l'apparition de particules dans  $\Omega$  :

$$m'(t) = \int_{\Omega} f(x, t) dx - \int_{\partial\Omega} U(x, t) \cdot n(x) dS_x = \int_{\Omega} \left( f(x, t) - \operatorname{div}(U(x, t)) \right) dx,$$

en utilisant le théorème de la divergence. Donc

$$\int_{\Omega} \left( \operatorname{div}(U) + u_t \right) dx = \int_{\Omega} f(x, t) dx$$

pour tout  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , on en déduit la loi d'équilibre du polluant

$$u_t + \operatorname{div}(U) = u_t + \nabla u \cdot V + u \operatorname{div}(V) = f.$$

Si on suppose que  $V = c \in \mathbb{R}^d$  est constante et si  $\phi(x)$  est la distribution initiale du polluant on obtient l'équation de transport ou d'*advection* (transport horizontal)

$$\begin{cases} u_t + c \cdot \nabla u = f(x, t) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (2.1)$$

Note : dans le cas de transport dû à une différence de température on parle de *convection*; des fluides chauds (faible densité) montent, tandis que des fluides froids (forte densité) descendent.

### 2.1.2 Résolution pour $d = 1$

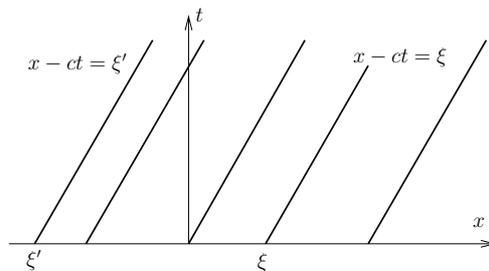
Supposons que  $f = 0$ , l'équation (2.1) devient

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad \text{où } c \in \mathbb{R}.$$

Si on pose  $v = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$ , l'équation aux dérivées partielles devient  $\frac{du}{dv}(x, t) = 0$ , c'est-à-dire  $u$  est constante dans la direction  $v$ .

On définit les *droites caractéristiques* dans le plan  $tx$  par  $x = ct + \xi$  et on vérifie que si  $u$  est solution, alors  $\frac{\partial}{\partial t}u(ct + \xi, t) = u_x c + u_t = 0$ .

Donc  $u(x, t)$  ne dépend que de  $\xi$  pour tout  $(x, t)$  vérifiant  $x - ct = \xi$ .



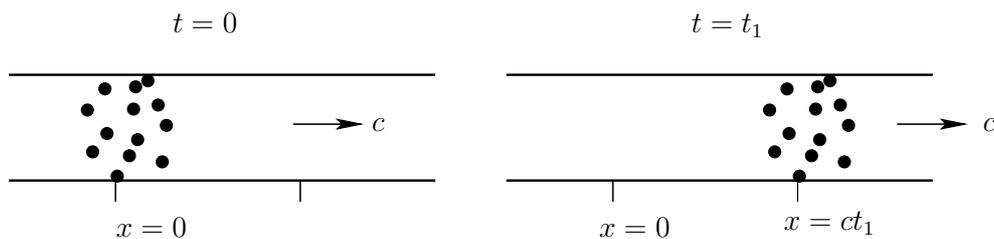
Donc  $u(x, t) = F(\xi) = F(x - ct)$  est la solution générale de l'équation aux dérivées partielles et, en utilisant la condition initiale, on obtient la solution du problème

$$u(x, t) = \phi(x - ct) \quad \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \quad \parallel$$

Le *domaine de dépendance* de  $u(x, t)$  par rapport aux valeurs initiales est réduit au point  $\xi$ . L'influence de la donnée  $\phi$  en  $\xi$  est réduite au points de la droite caractéristique.

Le graphe de  $u$  à l'instant  $t$  est celui de  $\phi$  translaté de  $ct$ .

Interprétation : Considérons un tube dans lequel coule de l'eau à la vitesse  $c > 0$  et qui contient des traces de polluant. D'après ce qui précède la distribution de polluant que l'on a en  $t = 0$  se retrouve inchangée à l'instant  $t_1 > 0$ , à une translation de  $+ct_1$  près.



### 2.1.3 Résolution du cas général

En s'inspirant du cas monodimensionnel on considère les droites caractéristiques dans l'espace des  $(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$  :

une droite caractéristique passant par le point  $(x, t)$  et de direction  $v = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$  est paramétrisée par  $(x + s c, t + s)$ , pour  $s \in \mathbb{R}$ .

On pose  $z(s) = u(x + s c, t + s)$  et, si  $u$  est solution de (2.1), on a  $z'(s) = f(x + s c, t + s)$ , d'où

$$u(x, t) - \phi(x - t c) = z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 z'(s) ds = \int_{-t}^0 f(x + s c, t + s) ds,$$

d'où la solution pour l'équation de transport avec vitesse constante  $c$

$$u(x, t) = \phi(x - t c) + \int_0^t f(x + (s - t) c, s) ds, \quad \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+. \quad \parallel$$

## 2.2 Équation de Laplace, équation de Poisson

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre deux

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^d u_{x_i x_i}(x) = f(x).$$

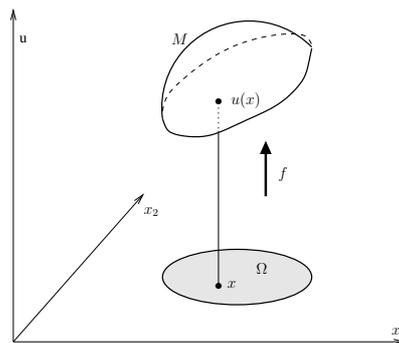
C'est l'équation de POISSON qui modélise des phénomènes d'équilibre : potentiel électrostatique, membrane en équilibre, champ gravitationnel,...

Si  $f = 0$  on a l'équation de LAPLACE et on dit que  $u$  est une *fonction harmonique*.

### 2.2.1 Modélisation : membrane élastique

On considère une membrane élastique qui s'identifie à une région plane  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  si on n'applique aucune force. Si on applique une force  $f$ , normale à  $\mathbb{R}^2$ , le membrane se déforme et prend une position d'équilibre  $M$ .

En supposant des *petites déformations* on note  $u(x) \in M$  la position d'équilibre du point  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ , donc  $M = u(\Omega)$ .



Le travail de la tension est proportionnel à la variation d'aire de la membrane :

$$\tau(\text{aire}(M) - \text{aire}(\Omega)) = \int_{\Omega} \tau \left( \sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1 \right) dx, \text{ avec } \tau \in \mathbb{R}_+^*.$$

Comme  $|u_{x_1}|$  et  $|u_{x_2}|$  sont petits, on a  $\sqrt{1 + |\nabla u|^2} \approx 1 + |\nabla u|^2/2$ .

Le travail de la force  $f$  est donné par le déplacement des points  $x \in \Omega$ , on en déduit l'expression de l'énergie potentielle de la membrane à l'équilibre :

$$E(u) = \int_{\Omega} \left( -\frac{1}{2} \tau |\nabla u|^2 + fu \right) dx.$$

Posons  $\phi(\varepsilon) = E(u + \varepsilon \tilde{u})$ , où  $\tilde{u}$  est une déformation *admissible* de  $M$ , *i.e.* compatible avec les contraintes imposées sur  $u$ . Comme la membrane est à l'équilibre,  $E(u)$  est minimal, donc

$$0 = \phi'(0) = \int_{\Omega} \left( -\tau \nabla u \cdot \nabla \tilde{u} + f \tilde{u} \right) dx.$$

En appliquant la formule de GREEN on a pour tout déplacement admissible  $\tilde{u}$  :

$$\int_{\Omega} \left( \tau \Delta u + f \right) \tilde{u} dx - \int_{\partial \Omega} \tau \frac{du}{dn} \tilde{u} d\sigma = 0. \quad (*)$$

En supposant  $u$ ,  $f$  et  $\tilde{u}$  régulières, on en déduit l'équation de Poisson :

$$\tau \Delta u + f = 0 \quad \text{dans } \Omega .$$

Des contraintes sur le bord de la membrane  $M$  donnent, à travers l'intégrale curviligne dans (\*), des contraintes sur  $\tilde{u}$  :

- si le bord de la membrane est fixé,  $u(x) = b(x)$  pour  $x \in \partial\Omega$ , on a  $\tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0$  et (\*) est vérifié; on obtient le *problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{1}{\tau} f & \text{sur } \Omega \\ u = b & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} ;$$

- si le bord de la membrane n'est pas fixé,  $\tilde{u}$  est non nul sur  $\partial\Omega$  et (\*) est vérifié si  $u$  est solution du *problème de Neumann* avec conditions au bord homogènes

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{1}{\tau} f & \text{sur } \Omega \\ \frac{du}{dn} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} ;$$

- si une force  $f_1$ , normale à  $\mathbb{R}^2$ , agit sur le bord de la membrane, l'intégrale curviligne dans (\*) devient  $\int_{\partial\Omega} \left( -\tau \frac{du}{dn} + f_1 \right) \tilde{u} d\sigma$ , et on a le *problème de Neumann*

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{1}{\tau} f & \text{sur } \Omega \\ \frac{du}{dn} = \frac{1}{\tau} f_1 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} .$$

## 2.2.2 Résultats d'unicité

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , de bord  $\partial\Omega$  régulier et  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ . À partir des formules de GREEN on obtient, en prenant  $v = u$ , resp.  $v = 1$

$$\int_{\Omega} u \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{du}{dn} dS - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx . \quad (2.2)$$

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} dS \quad (2.3)$$

Si  $u$  est harmonique dans  $\Omega$  on obtient grâce à (2.2) la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2.1

- Une solution  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  du problème de DIRICHLET  $\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$  est unique.

- Une solution  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  du problème de NEUMANN  $\begin{cases} \Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ \frac{du}{dn} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$  est unique à une constante près.

**Remarque :** En utilisant (2.3) on constate qu'une solution du problème de NEUMANN existe seulement si

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\partial\Omega} g(x) dS.$$

### 2.2.3 Formules de représentation

Fixons  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , le Laplacien étant invariant par translations et rotations, on se propose de chercher une fonction harmonique  $v$  telle que

$$v(x) = \varphi(r) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \quad \text{avec} \quad r = |x - x_0| = \left( \sum_{i=1}^d (x_i - x_i^0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors  $\varphi$  vérifie l'équation différentielle ordinaire :  $\varphi''(r) + \frac{d-1}{r}\varphi'(r) = 0$ ,

$$\text{dont la solution est } \varphi(r) = \begin{cases} C \ln(r) + C' & \text{si } d = 2 \\ \frac{C}{2-d} r^{2-d} + C' & \text{si } d > 2 \end{cases}, \quad \text{avec } (C, C') \in \mathbb{R}^2.$$

Donc  $v(x) = \varphi(|x - x_0|)$  est harmonique pour  $x \neq x_0$ .

Soit  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  et  $v(x) = \varphi(|x - x_0|)$ , où  $x_0 \in \Omega$  fixé, en posant  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_d}(x_0, \varepsilon)$  pour  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left( v \frac{du}{dn} - \frac{dv}{dn} u \right) dS.$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 on montre que

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{du}{dn} - \frac{dv}{dn} u \right) dS + C \omega_d u(x_0). \quad (2.4)$$

Dans la définition de  $\varphi$  on choisit  $C = \frac{1}{\omega_d}$ ,  $C' = 0$  et on pose

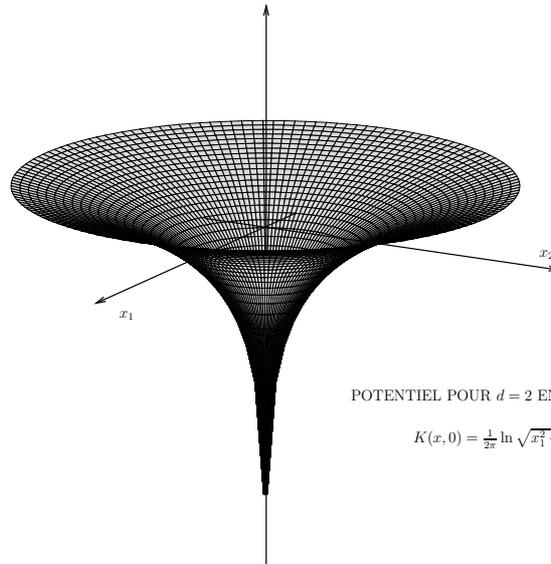
$$K(x, x_0) = v(x) = \varphi(|x - x_0|) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x - x_0| & \text{si } d = 2 \\ \frac{1}{(2-d)\omega_d} \frac{1}{|x - x_0|^{d-2}} & \text{si } d > 2. \end{cases} \quad \parallel\parallel$$

$K(x, x_0)$  est une *solution fondamentale* de pôle  $x_0$  de l'équation de LAPLACE, en effet  $\Delta_x K = \delta_{x_0}$  au sens des distributions.

On a, grâce à (2.4), pour tout  $x_0 \in \Omega$ ,

$$u(x_0) = \int_{\Omega} K(x, x_0) \Delta u(x) dx - \int_{\partial\Omega} \left( K(x, x_0) \frac{du}{dn}(x) - \frac{dK}{dn}(x) u(x) \right) dS_x, \quad (2.5)$$

dont on déduit la



**PROPOSITION 2.2.2**

Si  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  et  $\Delta u = 0$  dans  $\Omega$ , alors pour tout  $x_0 \in \Omega$  :

$$u(x_0) = - \int_{\partial\Omega} \left( K(x, x_0) \frac{du}{dn}(x) - \frac{dK}{dn}(x) u(x) \right) dS_x .$$

**2.2.4 Régularité des fonctions harmoniques**

Soit  $w \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  et  $w$  harmonique dans  $\Omega$ , alors  $G(x, x_0) = K(x, x_0) + w(x)$  est encore une solution fondamentale de pôle  $x_0$  de l'équation de LAPLACE. Grâce à (2.5) on a

$$u(x_0) = \int_{\Omega} G(x, x_0) \Delta u(x) dx - \int_{\partial\Omega} \left( G(x, x_0) \frac{du}{dn}(x) - \frac{dG}{dn}(x) u(x) \right) dS_x, \quad (2.6)$$

et on en déduit le

**THÉORÈME 2.2.1 (LOI DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE DE GAUSS)**

Soit  $u$  harmonique dans  $B_d(x_0, r)$  et continue sur  $\overline{B_d(x_0, r)}$ , alors

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{S^{d-1}(x_0, r)} u(x) dS = \frac{1}{\overline{\omega}_d r^d} \int_{B_d(x_0, r)} u(x) dx .$$

**Remarques :**

- 1) On peut montrer réciproquement qu'une fonction  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  qui vérifie la propriété de la moyenne pour toute  $B_d(x_0, r) \subset \Omega$  est harmonique dans  $\Omega$ .
- 2) De façon plus générale, si  $\Delta u(x) \geq 0$  dans  $B_d(x_0, r)$  on a

$$u(x_0) \leq \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{S^{d-1}(x_0, r)} u(x) dS$$

et on dit que  $u$  est *sous-harmonique*.

## THÉORÈME 2.2.2

Si  $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$  vérifie la propriété de la moyenne pour toute  $B_d(x_0, r) \subset \Omega$ , alors  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ .

## Remarques :

- 1) Noter que  $u$  n'est pas nécessairement continue sur  $\overline{\Omega}$ .
- 2) On montre qu'une fonction harmonique sur  $\Omega$  est en fait analytique.

## 2.2.5 Principe du maximum

## THÉORÈME 2.2.3 (PRINCIPE FAIBLE)

Si  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  et  $\Delta u \geq 0$  sur  $\Omega$ , ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , alors

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u .$$

## THÉORÈME 2.2.4 (PRINCIPE FORT)

Si  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  et  $\Delta u = 0$  sur  $\Omega$ , ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ , alors

$$\begin{aligned} \text{soit } & u \text{ est constante dans } \overline{\Omega}, \\ \text{soit } & \min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u, \text{ pour tout } x \in \Omega. \end{aligned}$$

## 2.2.6 Fonctions de Green

## DÉFINITION 2.2.1

On dit que  $G(x, x_0)$  est une fonction de GREEN pour le problème de DIRICHLET pour l'équation de LAPLACE dans  $\Omega$ , si

$$\begin{aligned} (i) \quad & G(x, x_0) = K(x, x_0) + w(x, x_0) \quad \text{pour } x \in \overline{\Omega}, x_0 \in \Omega \text{ et } x \neq x_0 \\ (ii) \quad & G(x, x_0) = 0 \quad \text{pour } x \in \partial\Omega, x_0 \in \Omega \end{aligned}$$

où  $w \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  et  $\Delta w = 0$  dans  $\Omega$  ;  $K$  est définie page 20.

Par définition  $G$  est une solution fondamentale et (2.6) donne, pour tout  $x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{dG}{dn}(x) dS. \quad (2.7)$$

On a donc trouvé la solution du problème  $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ .

Pour construire  $G$  il faut déterminer  $w$ , ce qui revient à résoudre un nouveau problème de DIRICHLET pour l'équation de LAPLACE dans  $\Omega$ .

Il est en général difficile de trouver une expression explicite pour  $G$ . On va présenter un cas où la géométrie de  $\Omega$  permet de déterminer  $G$ .

**Fonction de Green pour une boule.**

Soit  $\Omega = B_d(0, a)$  et  $x_0 \in B_d(0, a)$  fixé.

On montre que  $\partial\Omega = S^{d-1}(0, a)$  est le lieu de points  $x \in \mathbb{R}^d$  qui vérifient  $\frac{|x - x_0^*|}{|x - x_0|} = \frac{a}{|x_0|}$

où  $x_0^* = \left(\frac{a}{|x_0|}\right)^2 x_0$  est obtenu par réflexion.

En notant  $r = |x - x_0|$  et  $r^* = |x - x_0^*|$  on a, pour  $x \in S^{d-1}(0, a)$ ,  $r^* = \frac{a}{|x_0|} r$ .

On construit la fonction de GREEN  $G(x, x_0)$ , à partir de  $K(x, x_0)$  et  $K(x, x_0^*)$ , en remarquant que  $K(x, x_0^*)$  est harmonique dans  $B_d(0, a)$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  pour tout  $x \neq x_0^*$ .

Pour  $d = 2$  on considère la fonction de GREEN :

$$G(x, x_0) = \frac{1}{2\pi} \left( \ln |x - x_0| + \ln \left( \frac{a}{|x_0|} \right) - \ln |x - x_0^*| \right).$$

Pour  $d \geq 3$  on a la fonction de GREEN :

$$G(x, x_0) = \frac{1}{(2-d)\omega_d} \left( \frac{1}{|x - x_0|^{d-2}} - \left( \frac{a}{|x_0|} \right)^2 \frac{1}{|x - x_0^*|^{d-2}} \right).$$

Grâce à (2.7) on obtient la

**PROPOSITION 2.2.3 (FORMULE DE POISSON)**

Soit  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_d(0, a)})$  et  $\Delta u = 0$  dans  $B_d(0, a)$ , alors pour tout  $x_0 \in B_d(0, a)$

$$u(x_0) = \int_{S^{d-1}(0, a)} H(x, x_0) u(x) dS_x,$$

où  $H(x, x_0) = \frac{1}{a\omega_d} \frac{a^2 - |x_0|^2}{|x - x_0|^d}$  est le noyau de POISSON pour  $B_d(0, a)$ .

En étudiant les propriétés de  $H$  on montre réciproquement la

**PROPOSITION 2.2.4**

Soit  $g \in \mathcal{C}^0(S^{d-1}(0, a))$ , alors la fonction  $u$  définie par

$$u(x_0) = \begin{cases} g(x_0) & \text{si } |x_0| = a \\ \int_{S^{d-1}(0, a)} H(x, x_0) g(x) dS_x & \text{si } |x_0| < a \end{cases}$$

est  $\mathcal{C}^\infty$  et harmonique pour  $|x_0| < a$  et continue pour  $|x_0| \leq a$ .

**Remarque :** Un deuxième cas où la géométrie de  $\Omega$  permet de déterminer facilement  $G$  est celui d'un demi-espace  $\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*$ .

On a  $\partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*) = \{x \in \mathbb{R}^d / x_d = 0\} = \mathbb{R}^{d-1}$ .

Pour  $x_0 \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*$  on obtient les équivalents des propositions 2.2.3 et 2.2.4 avec

$$u(x_0) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} H(x, x_0) u(x) dx,$$

où  $H(x, x_0) = \frac{2x_d}{\omega_d} \frac{1}{|x - x_0|^d}$  est le noyau de POISSON pour  $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*$ .

## 2.2.7 Principe de Dirichlet

Soit  $\Omega$  un ouvert, borné de  $\mathbb{R}^d$ . Pour tout  $v$  dans  $\mathcal{A} = \left\{ v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) / v = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}$  on définit la *fonctionnelle d'énergie*

$$E[v] = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - v f \right) dx,$$

où  $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ . On a le résultat de *calcul des variations* suivant (cf. section modélisation) :

PROPOSITION 2.2.5

Soit  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ , on a équivalence entre

- (i)  $u$  est la solution unique de 
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
- (ii)  $u \in \mathcal{A}$  et  $E[u] = \min_{v \in \mathcal{A}} E[v]$ .

## 2.3 Équation de la chaleur

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre deux

$$u_t(x, t) - k\Delta u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t) = 0,$$

pour  $u$  défini sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$  et  $k > 0$ .

C'est l'équation de la chaleur qui modélise des phénomènes d'évolution : diffusion de chaleur, répartition de substances chimiques, mélange d'espèces,...

### Remarques :

1) Un changement d'échelle,  $\tilde{t} = kt$ , transforme l'équation aux dérivées partielles en  $\tilde{u}_{\tilde{t}} = \Delta \tilde{u}$ , il suffit donc d'étudier le cas  $k = 1$ . Comme  $k [m^2/s]$ , on obtient une équation aux dérivées partielles normalisée sans dimensions.

2) Poser  $\tilde{t} = -t$  change complètement l'équation aux dérivées partielles : on ne peut pas inverser le temps.

Contre-exemple (PETROVSKY) : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  la fonction  $u(x, t) = \frac{1}{n} \sin(nx) e^{-n^2 kt}$  est une solution de l'équation de la chaleur sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

On a  $u(x, 0) = \frac{1}{n} \sin(nx)$  qui est arbitrairement petit pour  $n$  grand.

En  $t = +\varepsilon > 0$ , la solution  $u(x, +\varepsilon) = \frac{1}{n} \sin(nx) e^{-n^2 k\varepsilon}$  est bornée par  $u(x, 0)$ .

Par contre, en  $t = -\varepsilon$ , on a  $u(x, -\varepsilon) = \frac{1}{n} \sin(nx) e^{+n^2 k\varepsilon}$  qui «explose» par rapport à  $u(x, 0)$ .

Le problème  $u_t = ku_{xx}$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , avec  $u(x, 0) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ , est instable donc mal posé. L'équation de la chaleur modélise des phénomènes d'évolution *irréversibles*.

3) Poser  $(\tilde{x}, \tilde{t}) = (ax, a^2t)$  préserve l'équation aux dérivées partielles et la quantité  $|x|^2/t$ .

### 2.3.1 Modélisation

#### 2.3.1.1 Équations de réaction-diffusion

Nous allons modéliser le comportement de diffusion d'une population (cellules, insectes) ou de particules (substances chimiques). On suppose l'existence d'une source de particules (naissance, resp. décès, d'insectes).

Soit  $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ , avec  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et  $\partial\Omega$  régulier. On note

$u(x, t)$  la fonction de densité des particules (la concentration),

$q(x, t, \dots)$  le taux de création net de particules («naissances moins décès») et

$F(x, t, \dots)$  la densité du flux de particules, c'est-à-dire  $F(x, t) \cdot n$  est le flux de particules (par unité de temps) à travers un élément de surface plane, perpendiculaire à  $n$  en  $x$  et d'aire 1 (cf. annexe C).

On suppose pour la suite que  $u$  et  $F$  sont réguliers et on considère  $O \subset \Omega$  de bord régulier. La variation de masse dans  $O$  est due à la création/destruction de particules dans  $O$  et au flux de particules à travers  $\partial O$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_O u(x, t) dx = \int_O q(x, t) dx - \int_{\partial O} F(x, t) \cdot n(x) dS_x,$$

d'où, pour tout  $O \subset \Omega$ ,

$$\int_O u_t(x, t) dx = \int_O \left( -\operatorname{div}(F(x, t)) + q(x, t) \right) dx,$$

dont on tire la *loi d'équilibre* de la population

$$u_t = -\operatorname{div}(F) + q \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour exploiter le modèle on va se donner  $F$  et  $q$ , deux cas sont présentés :

- Si  $u(x, t)$  est la température, alors la quantité de chaleur dans  $\Omega$  à l'instant  $t$  est donnée par  $\int_{\Omega} c\rho u dx$ , où  $c$  est la capacité calorifique,  $\rho$  la densité du corps et on suppose, pour simplifier, que  $c\rho = 1$ .

Loi de FOURIER :

la chaleur va des régions chaudes vers les régions froides à une vitesse proportionnelle à la variation de température.

On suppose de plus que l'on ne peut perdre de la chaleur que par  $\partial\Omega$ , on a donc  $F = -k\nabla u$ , où  $k(x, t)$  est la conductivité de chaleur, et  $q = 0$ .

D'où  $u_t = \operatorname{div}(k\nabla u) = \nabla k \cdot \nabla u + k\Delta u$  et, si  $k$  est constant,  $u_t = k\Delta u$ .

On a obtenu l'équation de la chaleur.

- Si  $u(x, t)$  représente la concentration de particules on a la

Loi de FICK :

les particules vont des hautes densités vers les faibles densités et leur flux est proportionnel à la variation de la densité.

On obtient encore  $F = -D\nabla u$ , où  $D$  est le coefficient de diffusion, et d'où l'équation de réaction-diffusion

$$u_t = \operatorname{div}(D\nabla u) + q.$$

**Exemple :** Soient  $A$  et  $B$  des substances chimiques qui réagissent suivant la loi  $A + B \rightarrow 2B + R$ . On note  $a$ , resp.  $b$ , la concentration de  $A$ , resp.  $B$ .

Si on a un mélange parfait de  $A$  et  $B$  les concentrations vérifient le système différentiel ordinaire

$$\begin{cases} a_t = -ab \\ b_t = ab \end{cases}.$$

Si  $A$  et  $B$  n'ont pas été mélangés et si on veut modéliser leur diffusion, on obtient le modèle de réaction-diffusion

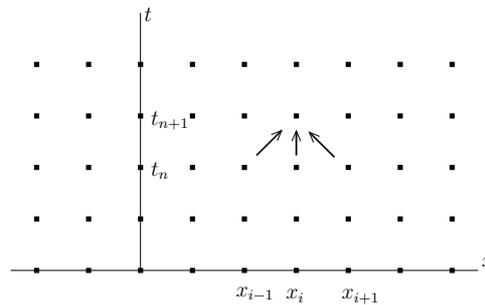
$$\begin{cases} a_t = D_1\Delta a - ab \\ b_t = D_2\Delta b + ab \end{cases}.$$

### 2.3.1.2 Équations d'advection-diffusion

On considère le mouvement de particules (atomes, insectes) sur une grille discrète monodimensionnelle  $x_i = i\eta$  ( $\eta > 0$ ). On suppose que ces particules peuvent changer de position tous les  $\tau > 0$  et qu'elles bougent d'au plus  $\pm\eta$ . On note  $t_n = n\tau$ .

On note  $u_i^n$  la probabilité d'être en  $x_i$  à l'instant  $t_n$ , avec  $\sum_{x_i} u_i^n \xrightarrow{(\eta \rightarrow 0)} \int_{\mathbb{R}} u(t_n, x) dx = 1$ .

De plus on note  $p_i^n$  la probabilité de passer de la position  $x_i$  à la position  $x_{i+1}$  entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , et  $q_i^n$  la probabilité de passer de la position  $x_i$  à la position  $x_{i-1}$  entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .



La probabilité pour une particule d'être en  $x_i$  à l'instant  $t_{n+1}$  est donné par l'équation de CHAPMAN-KOLMOGOROV

$$u_i^{n+1} = p_{i-1}^n u_{i-1}^n + q_{i+1}^n u_{i+1}^n + (1 - p_i^n - q_i^n) u_i^n,$$

où les trois termes du membre de droite représentent respectivement la probabilité d'arriver en  $x_i$  depuis  $x_{i-1}$ , depuis  $x_{i+1}$  ou de rester en  $x_i$ , entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

Si on réécrit l'équation sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} &= \frac{1}{2\eta} \left( \frac{p_{i-1}^n - q_{i-1}^n}{\tau} \eta u_{i-1}^n - \frac{p_{i+1}^n - q_{i+1}^n}{\tau} \eta u_{i+1}^n \right) \\ &+ \frac{1}{\eta^2} \left( \frac{p_{i-1}^n + q_{i-1}^n}{2\tau} \eta^2 u_{i-1}^n + \frac{p_{i+1}^n + q_{i+1}^n}{2\tau} \eta^2 u_{i+1}^n - 2 \frac{p_i^n + q_i^n}{2\tau} \eta^2 u_i^n \right) \end{aligned}$$

et si on suppose que  $\frac{p_i^n - q_i^n}{\tau} \eta \rightarrow c(x, t)$  et  $\frac{p_i^n + q_i^n}{2\tau} \eta^2 \rightarrow d(x, t)$

quand  $\tau$  et  $\eta$  tendent vers 0, on obtient l'équation de FOKKER-PLANCK :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [c(t, x) u] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [d(x, t) u],$$

où  $c(x, t)$  est la *vitesse d'advection* (ou *convection*) et  $d(x, t)$  le *coefficient de diffusion*.

Note : les limites ci-dessus se justifient dans le cadre de la théorie des processus de MARKOV.

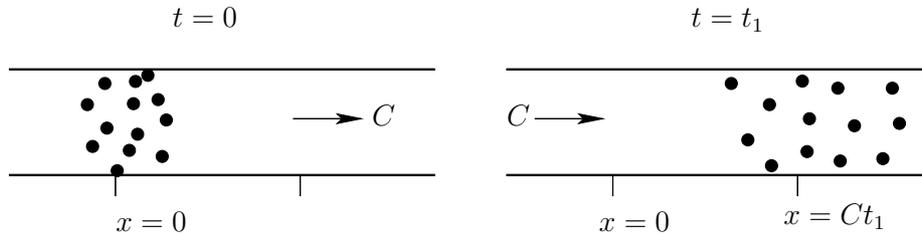
Si  $c > 0$ , *i.e.*  $p_i^n > q_i^n$ , les particules ont un mouvement vers la droite, si  $c < 0$  on a un mouvement vers la gauche.

Si  $d$  est grand, *i.e.*  $p_i^n + q_i^n$  grand ( $\approx 1$ ), les particules ont tendance à se déplacer.

Si  $p_i^n = q_i^n = 1/2$  alors  $c(x, t) = 0$  et  $d(x, t) = D$  est constante, on obtient l'équation de la chaleur  $u_t = D u_{xx}$ .

Si  $c(x, t) = C$  et  $d(x, t) = D$  on a une équation d'advection-diffusion :  $u_t - D u_{xx} + C u_x = 0$ .

Interprétation : considérons un tube dans lequel coule de l'eau à la vitesse  $C > 0$  et contenant des traces de polluant. La distribution initiale de polluant est, à l'instant  $t_1 > 0$ , transporté par advection de  $Ct_1$  et modifiée par diffusion.



**Remarque** : Si on modélise des phénomènes thermiques on parle de convection et donc d'équations de convection-diffusion : les mouvements de masses d'air dans l'atmosphère et les courants océaniques dus à des différences de température influencent le climat de la terre. Des phénomènes de convection thermique sous l'écorce terrestre et dans le noyau sont responsables de la tectonique des plaques et de la création du champ magnétique terrestre.

### 2.3.2 Calcul d'une solution

On considère le problème 
$$\begin{cases} u_t(x, t) = \Delta u(x, t) & \text{sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = f(x) & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases}.$$

On va déterminer, de façon formelle, une solution en utilisant la transformée de FOURIER

de  $u$  par rapport aux variables d'espace  $x$  :  $v(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x, t) e^{-i x \cdot \xi} dx$ .

On obtient l'équation différentielle ordinaire en  $v$  : 
$$\begin{cases} v_t(\xi, t) = -|\xi|^2 v(\xi, t) \\ v(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases},$$

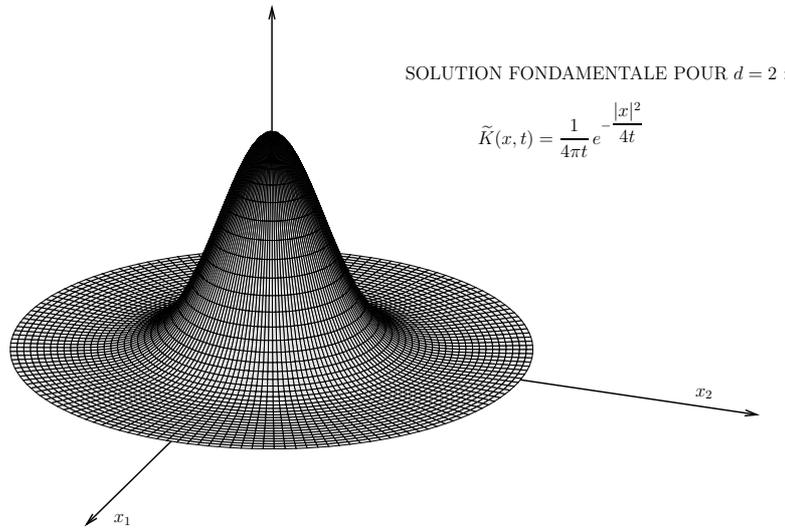
d'où  $v(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$  et

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|^2 t} e^{i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y, t) f(y) dy,$$

où  $K(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i(x-y) \cdot \xi - |\xi|^2 t\right) d\xi = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ .  $\quad \parallel$

**Remarques** :

1. La fonction  $\widetilde{K}(x, t) = K(x, 0, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \mathbb{I}_{\{t>0\}}$  est une *solution fondamentale*, de pôle  $(0, 0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ , de l'équation de la chaleur.
2. On a  $K(x, y, t) = G_{\sqrt{2t}}(x-y)$  avec  $G_\sigma(y) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} e^{-\frac{|y|^2}{2\sigma^2}}$ , la Gaussienne centrée d'écart type  $\sigma$ .



$K$  possède les propriétés suivantes :

- a)  $K(x, y, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  pour  $x, y \in \mathbb{R}^d$  et  $t > 0$ .
- b) Pour  $x, y \in \mathbb{R}^d$  et  $t > 0$ ,  $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) K(x, y, t) = 0$ .
- c)  $\int_{\mathbb{R}^d} K(x, y, t) dy = 1$  pour  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $t > 0$ .
- d) Pour  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $\delta > 0$  on a  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \int_{|y-x| > \delta} K(x, y, t) dy = 0$

Grâce à ces propriétés on démontre que  $u$  est bien une solution, on a le

**THÉORÈME 2.3.1**

Soit  $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d)$ , i.e.  $f$  continue et bornée, alors la fonction définie par

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d$$

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \text{ et } t > 0,$$

est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$ , vérifie  $u_t = \Delta u$  sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*$  et est continue sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ .

**Remarques :**

- 1. Si  $f$  est borné on a pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $t > 0$  :  $\inf_{\mathbb{R}^d} f \leq u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^d} f$ .
- 2. On peut assouplir les hypothèses du théorème :  
 soit  $f$  une fonction mesurable et supposons que pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $|f(y)| \leq M e^{a|y|^2}$ ,  
 avec  $a, M$  des constantes fixées. Alors la fonction  $u$ , définie dans le théorème, vérifie  
 $u_t = \Delta u$  et est  $\mathcal{C}^\infty$  en tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times ]0, \frac{1}{4a}[$ .  
 Si  $f$  est continue en  $x_0$  on a en plus  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = f(x_0)$ .

Donc même avec des données initiales non continues la solution devient, à l'instant  $t > 0$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  : l'équation de la chaleur a un *effet régularisant*.

3. L'exemple de ТИХОНОВ montre que la solution  $u$  du théorème n'est pas unique.

$$\text{Soit } \varphi(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t \leq 0 \end{cases} \text{ et, pour } (x, t) \in \mathbb{R}^2, \text{ posons } u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}.$$

Alors  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ , vérifie  $u_t = u_{xx}$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u(x, 0) = 0$ .

4. Le théorème précédent permet de considérer la fonction  $u(x, t) = \frac{1}{(4\pi kt)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4kt}}$ , définie pour  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ , comme solution au sens des distributions du problème :

$$\begin{cases} u_t(x, t) = k \Delta u(x, t) & \text{sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = \delta_0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

5. La valeur en  $(x, t)$  de  $u$ , définie dans le théorème précédent, dépend, pour  $t > 0$ , de tous les points  $y \in \mathbb{R}^d$ . Réciproquement la valeur de  $f$  en  $y_0 \in \mathbb{R}^d$  affecte à l'instant  $t > 0$  (petit) les valeurs de  $u$  en tout point  $x$ . Les effets de l'équation de la chaleur voyagent à vitesse «infinie».

On s'intéresse donc plutôt à la vitesse de diffusion d'une certaine proportion  $\alpha$  de la concentration, resp. chaleur, initiale. Considérons une diffusion modélisée par  $u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ , pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Soit  $\alpha \in ]0, 1[$  donné, à l'instant  $t > 0$  la quantité de particules  $\alpha$  se trouve dans l'intervalle  $[-x_\alpha, x_\alpha]$  et

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-x_\alpha}^{x_\alpha} e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi kt}} \int_0^{x_\alpha} e^{-\frac{x^2}{4kt}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x_\alpha}{2\sqrt{kt}}} e^{-z^2} dz.$$

L'intégrale de droite étant constante, on trouve que  $x_\alpha$  est proportionnel à  $2\sqrt{kt}$ . On dit que  $t = x^2/k$  est le *temps de diffusion*.

On peut comparer le temps de diffusion au *temps d'advection*  $t = x/c$ , voir p. 15.

### 2.3.3 Principe du maximum et unicité

On va traiter deux cas, celui d'un domaine spatial borné et celui de l'équation de la chaleur sur  $\mathbb{R}^d$ .

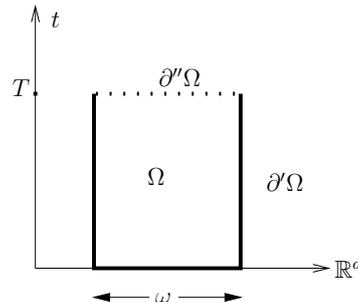
• Cas d'un domaine spatial borné.

Soit  $\omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ; pour  $T > 0$  fixé on pose  $\Omega = \{(x, t) / x \in \omega, 0 < t < T\}$ .

On a  $\partial\Omega = \partial'\Omega \cup \partial''\Omega$  avec

$$\partial'\Omega = (\partial\omega \times [0, T]) \cup (\omega \times \{t = 0\})$$

$$\text{et } \partial''\Omega = \omega \times \{t = T\}.$$



**THÉORÈME 2.3.2 (PRINCIPE DU MAXIMUM)**

Soit  $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  tel que  $u_t, u_{x_i x_j}$  existent et soient continues dans  $\Omega$ .

Si  $u_t - \Delta u \leq 0$  dans  $\Omega$ , alors

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial' \Omega} u .$$

**THÉORÈME 2.3.3**

Soit  $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  tel que  $u_t, u_{x_i x_j}$  existent et soient continues dans  $\Omega$ .

Alors  $u$  est déterminé de façon unique dans  $\overline{\Omega}$  si on se donne  $u_t - \Delta u$  sur  $\Omega$  et  $u$  sur  $\partial' \Omega$ .

**COROLLAIRE 2.3.1**

Soit  $\phi \in \mathcal{C}^0(\omega \times ]0, T[)$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(\omega)$  et  $g \in \mathcal{C}^0(\partial \omega \times [0, T])$ .

Il existe au plus une solution  $u$  du problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \phi \text{ sur } \omega \times ]0, T[ \\ u = f \text{ sur } \omega \times \{t = 0\} \\ u = g \text{ sur } \partial \omega \times [0, T] \end{cases} ,$$

continue sur  $\overline{\Omega}$  et telle que  $u_t, u_{x_i x_j}$  existent et soient continues sur  $\Omega$ .

- Cas où le domaine spatial est  $\mathbb{R}^d$ .

**THÉORÈME 2.3.4 (PRINCIPE DU MAXIMUM)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$  et soit  $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d \times [0, T])$  tel que  $u_t, u_{x_i x_j}$  existent et soient continues dans  $\mathbb{R}^d \times ]0, T[$ , si de plus

$$\begin{aligned} (i) \quad & u_t - \Delta u \leq 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^d \times ]0, T[ \\ (ii) \quad & u(x, 0) = f(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \\ (iii) \quad & u(x, t) \leq M e^{a|x|^2} \text{ sur } \mathbb{R}^d \times ]0, T[ \end{aligned}$$

alors

$$u(x, t) \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^d} f(z) \quad \text{sur } \mathbb{R}^d \times [0, T] .$$

**COROLLAIRE 2.3.2**

Soit  $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ ,  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ .

Il existe au plus une solution  $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d \times [0, T])$  du problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \phi \text{ sur } \mathbb{R}^d \times ]0, T[ \\ u = f \text{ sur } \mathbb{R}^d \times \{t = 0\} \end{cases}$$

qui vérifie  $|u(x, t)| \leq M e^{a|x|^2}$  sur  $\mathbb{R}^d \times [0, T]$ , pour des constantes  $M, a > 0$ .

**Remarques :**

La solution obtenue dans la section 2.3.2 est unique si  $f$  est borné et si l'on se restreint aux solutions bornées.

Si  $f$  est majoré par une expression du type  $M e^{a|x|^2}$  et si on se restreint aux solutions vérifiant le même type de majorations, on obtient encore une solution unique (cf. remarque 3, section 2.3.2).

L'exemple de TIKHONOV ne peut pas vérifier une majoration du type  $M e^{a|x|^2}$  et permet de construire des solutions «très» croissantes à partir de n'importe quelle condition initiale  $f$ .

### 2.3.4 Régularité sur un domaine borné

Soit  $\omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  avec  $\partial\omega$  régulier, on pose  $\Omega = \omega \times ]0, T[$ .

On suppose que  $u$ ,  $u_t$  et les  $u_{x_i x_j}$  existent et sont continues dans  $\overline{\Omega}$  et que  $u_t - \Delta u = 0$  dans  $\Omega$ .

Pour  $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  quelconque on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} v(u_t - \Delta u) dx dt = \int_{\omega} \left( v(x, T)u(x, T) - v(x, 0)u(x, 0) \right) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} u(v_t + \Delta v) dx dt - \int_0^T \int_{\partial\omega} \left( v \frac{du}{dn} - \frac{dv}{dn} u \right) dS_x dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

En particulier on pose  $v(x, t) = K(x, y, T + \varepsilon - t)$  pour  $y \in \omega$  fixé et  $\varepsilon > 0$ . Alors  $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  et  $v_t + \Delta v = 0$ , donc (2.8) devient

$$\begin{aligned} \int_{\omega} K(x, y, \varepsilon)u(x, T) dx &= \int_{\omega} K(x, y, T + \varepsilon)u(x, 0) dx \\ &\quad + \int_0^T \int_{\partial\omega} \left( K(x, y, T + \varepsilon - t) \frac{du}{dn}(x, t) - \frac{dK}{dn}(x, y, T + \varepsilon - t)u(x, t) \right) dS_x dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0 le membre de gauche de (2.9) tend vers  $u(y, T)$ , en effet il est solution de  $w_{\varepsilon}(y, \varepsilon) - \Delta_y w(y, \varepsilon) = 0$  avec  $w(y, 0) = u(y, T)$  (même démonstration que pour le théorème 2.3.1).

Si on pose  $K(x, y, s) = 0$  pour  $s \leq 0$ , alors  $K(x, y, s)$  est  $\mathcal{C}^{\infty}$  pour  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,  $x \neq y$  et  $s \in \mathbb{R}$ . On obtient

$$\begin{aligned} u(y, T) &= \int_{\omega} K(x, y, T)u(x, 0) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial\omega} \left( K(x, y, T - t) \frac{du}{dn}(x, t) - \frac{dK}{dn}(x, y, T - t)u(x, t) \right) dS_x dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

De cette expression on déduit que  $u$  est  $\mathcal{C}^{\infty}$  pour tout  $y \in \omega$  et  $T > 0$ .

## 2.4 Équation des ondes

Dans cette section on va étudier l'équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre deux

$$u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, t) = 0,$$

pour  $u$  défini sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  et  $c > 0$ .

C'est l'équation des ondes qui modélise des phénomènes d'évolution : corde ou membrane vibrante, ondes acoustiques, ondes électromagnétiques, ondes sismiques, ...

On note  $\square u = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) u$  le D'ALEMBERTIEN de  $u$ .

**Remarque :** Une inversion et translation du temps,  $\tilde{t} = t_0 - t$ , ne change pas l'équation aux dérivées partielles, on va restreindre l'étude à  $t \geq 0$ .

### 2.4.1 Modélisation

#### 2.4.1.1 Membrane vibrante

Considérons une membrane élastique en vibrations  $M$ . Pour  $x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  et  $t > 0$ , on note  $u(x, t)$  la position de la membrane au point  $x$  à l'instant  $t$  :  $M_t = u(\Omega, t)$ . Alors  $u_t(x, t)$  est la vitesse du déplacement (vertical) de la membrane en  $x$  à l'instant  $t$  et  $u_{tt}(x, t)$  est l'accélération.

On suppose des petits déplacements transversaux et on introduit les constantes  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ , la densité de la membrane, et  $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ , le coefficient de tension. On obtient l'expression suivante pour l'énergie potentielle du système à l'instant  $t$ , voir aussi page 18,

$$E_p = \frac{\tau}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx$$

et l'énergie cinétique du système est

$$E_c = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} u_t(x, t)^2 dx .$$

D'après le *principe de HAMILTON* de la mécanique, la membrane passe de l'état en  $t = 0$  à l'état en  $t = T$ ,  $T > 0$ , par un point critique de la fonctionnelle

$$A(u) = \int_0^T (E_c - E_p) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \rho u_t^2 - \tau |\nabla u|^2 \right) dx dt .$$

*i.e.* la variation première de  $A$  est nulle. Posons  $\phi(\varepsilon) = A(u + \varepsilon \tilde{u})$ , où la perturbation admissible  $\tilde{u}$  est régulière et vérifie  $\tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}(x, T) = 0$  pour tout  $x \in \overline{\Omega}$ . On a

$$0 = \phi'(0) = \int_0^T \int_{\Omega} (\rho u_t \tilde{u}_t - \tau \nabla u \cdot \nabla \tilde{u}) dx dt ,$$

l'identité de GREEN et l'hypothèse d'admissibilité permettent d'écrire pour tout  $\tilde{u}$  :

$$\int_0^T \int_{\Omega} (-\rho u_{tt} + \tau \Delta u) \tilde{u} \, dx dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \tau \frac{du}{dn} \tilde{u} \, dS_x dt = 0. \quad (*)$$

Si l'on choisit  $\tilde{u}$  tel que  $\tilde{u}(x, t) = 0$  pour tout  $x \in \partial\Omega$  et  $t \in [0, T]$ , on obtient grâce au premier terme de la relation (\*) l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$u_{tt} = c^2 \Delta u, \quad \text{où } c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}.$$

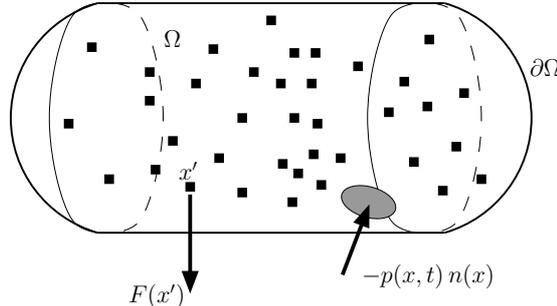
Le second terme de la relation (\*) impose des conditions au bord :

si la membrane est fixée au bord,  $u(x, t) = 0$  ; si la membrane est libre,  $\frac{du}{dn}(x, t) = 0$  pour  $(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*$  ;

Pour complètement modéliser le mouvement de la membrane on a des conditions initiales : la position  $u(x, 0)$  et la vitesse  $u_t(x, 0)$ , données pour  $x \in \Omega$  et  $t = 0$ .

### 2.4.1.2 Ondes acoustiques

On modélise un fluide (liquide ou gaz) par la densité des particules  $u(x, t)$  et la vitesse  $V(x, t)$  pour  $x \in \mathbb{R}^3$  et  $t > 0$ . La densité du flux de particules  $uV$  [*particules/m<sup>2</sup>s*] (cf. annexe C) est ici interprété comme étant la quantité de mouvement ([*kgm/s*]) des particules par unité de volume.



On suppose que  $u$  et  $V$  sont réguliers. Soit  $\Omega$  un ouvert borné quelconque de  $\mathbb{R}^3$ , de bord régulier ; pour  $x \in \partial\Omega$  on note  $n(x)$  le vecteur normal unité extérieur.

La loi de conservation de masse donne

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u(x, t) \, dx = - \int_{\partial\Omega} u(x, t) V(x, t) \cdot n(x) \, dS_x,$$

d'où,

$$\int_{\Omega} u_t \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(uV) \, dx,$$

comme  $\Omega$  est quelconque on obtient la *loi de continuité* :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(uV). \quad (2.11)$$

Écrivons maintenant la loi de conservation de la quantité de mouvement pour chacune des trois composantes de  $uV$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u V_i \, dx = - \int_{\partial\Omega} u V_i V \cdot n(x) \, dS - \int_{\partial\Omega} p n_i(x) \, dS + \int_{\Omega} u F_i \, dx ; \quad (*)$$

où  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $p(x, t)$  ( $[N/m^2] = [kg/ms^2]$ ) est la pression et  $F(x, t)$  la somme des forces extérieures qui agissent au point  $x$  (*e.g.* gravitation).

Le membre de gauche représente la variation de la quantité de mouvement dans  $\Omega$ , le premier terme du membre de droite représente le flux de la quantité de mouvement à travers  $\partial\Omega$ , le second la pression sur la paroi  $\partial\Omega$  et le troisième l'apport des forces externes. En appliquant le théorème de la divergence on a, pour  $1 \leq i \leq 3$  :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u V_i}{\partial t} + \operatorname{div}(u V_i V) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - u F_i \right) dx = 0. \quad (**)$$

En supposant  $p$  et  $F$  réguliers et comme  $\Omega$  est arbitraire la relation (\*\*\*) donne

$$u \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} + V \cdot \nabla V_i \right) + V_i \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u V) \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + u F_i.$$

En utilisant (2.11) on obtient la *loi du mouvement* :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V = - \frac{1}{\rho} \nabla p + F. \quad (2.12)$$

Les quatre équations aux dérivées partielles (2.11), (2.12) sont complétées par la *loi d'état* :  $p(x, t) = p(\rho(x, t))$  ; la pression est fonction croissante de la densité du fluide.

Noter que le terme d'advection  $(V \cdot \nabla) V = DV V$  est non linéaire et qu'il est en partie à l'origine de phénomènes complexes, et intéressants, en mécanique des fluides.

Approximation acoustique : Pour simplifier notre modèle on va négliger les forces externes, donc  $F = 0$ . De plus, la propagation du son dans un gaz (*e.g.* l'air) est le résultat de vibrations que l'on va supposer faibles :  $V$  est petit et le terme d'advection dans (2.12) est négligeable. Finalement, on suppose que la densité et la pression s'écartent peu de quantités nominales  $\rho_0$  et  $p_0$  :

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x, t), \tilde{\rho} \ll \rho_0 \quad \text{et} \quad p(x, t) = p_0 + \tilde{p}(x, t), \tilde{p} \ll p_0.$$

On linéarise les équations de la dynamique des fluides autour de  $(\rho, p, V) = (\rho_0, p_0, 0)$ .

Alors  $\tilde{p} = \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) \tilde{\rho}$  et l'équation (2.11) devient :  $\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(V) = 0$ ,

tandis que l'équation (2.12) s'écrit :  $\rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) \nabla \tilde{\rho}$ .

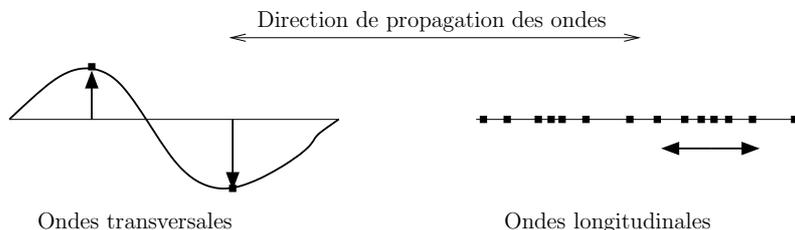
En dérivant la première équation par rapport à  $t$  et en utilisant la seconde, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} &= -\rho_0 \operatorname{div} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) \\ &= -\rho_0 \operatorname{div} \left( - \frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) \nabla \tilde{\rho} \right) = \frac{dp}{d\rho}(\rho_0) \Delta \tilde{\rho}. \end{aligned}$$

On pose  $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}(\rho_0)}$  et  $\tilde{\rho}$  vérifie donc l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}^3$  :  $\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \tilde{\rho}$ .

La propagation des ondes acoustiques se fait par augmentation et diminution de la densité de particules. Pour l'air la vitesse des ondes est  $c = 340 \text{ m/s}$ .

**Remarque :** Les ondes sur une membrane ou corde vibrante sont dites *ondes transversales* car elles se propagent dans la direction perpendiculaire au mouvement des particules. Les ondes acoustiques sont des *ondes longitudinales* car elles se propagent dans la même direction que les particules.



## 2.4.2 Équation des ondes dans $\mathbb{R}$

On considère le problème

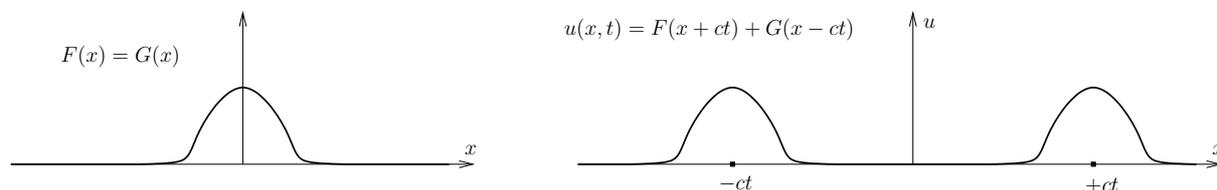
$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, c \in \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.13)$$

Grâce au changement de variables  $\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$  on obtient l'équation  $u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0$ .

Le domaine de  $u$  étant connexe on trouve  $u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$ , où  $F$  et  $G$  sont des fonctions d'une variable réelle de classe  $\mathcal{C}^2$ , et on a

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

La solution générale de l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}$  est donc obtenue par superposition de  $v$ , solution de  $v_t - cv_x = 0$  :  $v(x, t) = F(x + ct)$ , et de  $w$ , solution de  $w_t + cw_x = 0$  :  $w(x, t) = G(x - ct)$ .



Le graphe de  $u$  dans le plan  $xu$  montre deux ondes, solutions de deux équations de transport, qui se propagent, sans changer de forme, vers la gauche pour  $v$  et vers la droite pour  $w$ .

En utilisant les conditions initiales de (2.13) on trouve

$$F(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy + \lambda \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy - \lambda.$$

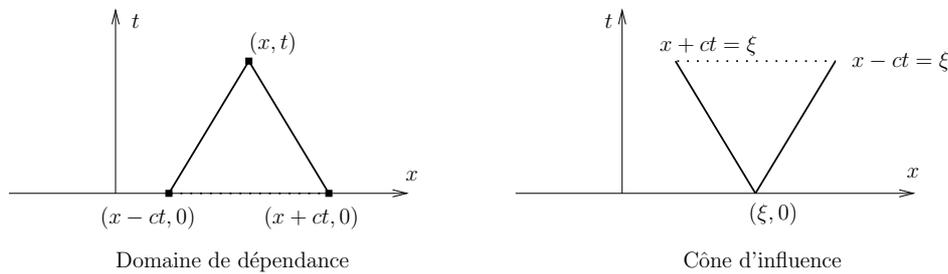
Si  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , le problème (2.13) admet une solution unique de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , donnée par la formule de D'ALEMBERT

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left( f(x + ct) + f(x - ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy. \quad \parallel \quad (2.14)$$

**Remarques :**

1) La valeur de  $u(x, t)$  dépend des valeurs de  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $[x - ct, x + ct]$ , c'est le *domaine de dépendance*.

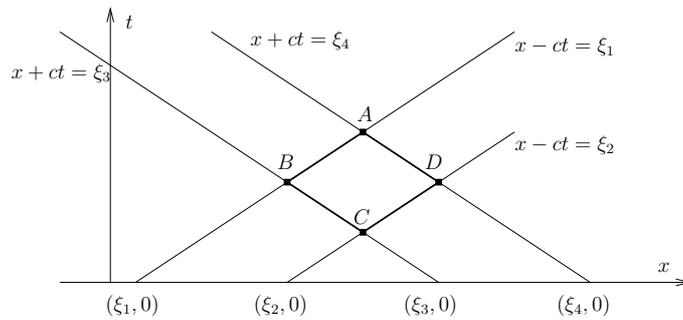
Réciproquement, le *cône d'influence* du point  $(\xi, 0)$  est l'ensemble  $\{(x, t) / |x - \xi| \leq ct\}$ .  
L'information voyage à vitesse finie  $c$ .



2) La fonction (2.14) est au plus aussi régulière que les conditions initiales  $f$  et  $g$ .

3) Pour  $c > 0$  on considère l'équation des ondes  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  (\*).

On note  $(ABCD)_{/c}$  le parallélogramme formé par les points  $A, B, C$  et  $D$  et dont les côtés se trouvent sur des *droites caractéristiques* de (\*).



Soit  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ , alors  $u$  vérifie l'équation aux dérivées partielles (\*) si et seulement si pour tout  $(ABCD)_{/c} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  :  $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$ .

### 2.4.3 Méthode des moyennes sphériques ( $d \geq 2$ )

Soit  $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ , on définit la *moyenne sphérique* de  $h$  sur la sphère  $S^{d-1}(x, r)$  par

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_d r^{d-1}} \int_{|y-x|=r} h(y) dS_y = \frac{1}{\omega_d} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi) dS_\xi.$$

La fonction  $M_h$  est ainsi définie pour tout  $r \in \mathbb{R}$  et on a  $M_h(x, r) = M_h(x, -r)$ .

Si  $h \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ , alors  $M_h \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^{d+1})$ .

En particulier si  $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$  on calcule  $\frac{\partial}{\partial r} M_h(x, r) = \frac{1}{r^{d-1}} \Delta_x \left( \int_0^r \rho^{d-1} M_h(x, \rho) d\rho \right)$ .

On en déduit l'équation de DARBOUX, vérifiée par toute moyenne sphérique d'une fonction  $h$  de classe  $\mathcal{C}^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_h(x, r) = \Delta_x M_h(x, r) \\ M_h(x, 0) = h(x) \\ \frac{\partial}{\partial r} M_h(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

#### Application à l'équation des ondes ( $d \geq 2$ )

Soit  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$  solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) & \text{sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \end{array} \right. \quad (2.16)$$

On définit la moyenne sphérique de  $u$  :  $M_u(x, r, t) = \frac{1}{\omega_d} \int_{|\xi|=1} u(x + r\xi, t) dS_\xi$ ,  
avec  $u(x, t) = M_u(x, 0, t)$ .

Grâce à l'équation de DARBOUX (2.15), on a  $\Delta_x M_u = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u$

or, par un calcul direct on obtient  $\Delta_x M_u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2}$ .

Donc  $M_u$  est solution, pour  $x \in \mathbb{R}^d$  fixé, de l'équation d'EULER-DARBOUX-POISSON :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2}(x, r, t) = c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x, r, t) & \text{pour } (r, t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^* \\ M_u(x, r, 0) = M_f(x, r) & \text{pour } r \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial M_u}{\partial t}(x, r, 0) = M_g(x, r) & \text{pour } r \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

On a donc transformé l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}^d$  en une équation aux dérivées partielles avec variables scalaires  $r$  et  $t$

### 2.4.4 Équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$

On se propose de résoudre le problème (2.16) pour  $d = 3$ .

En utilisant (2.17) on montre que la fonction  $v(r, t) = rM_u(x, r, t)$  est solution de l'équation des ondes pour  $d = 1$

$$\begin{cases} v_{tt}(r, t) = c^2 v_{rr}(r, t) & \text{pour } (r, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ v(r, 0) = rM_f(x, r) & \text{pour } r \in \mathbb{R} \\ v_t(r, 0) = rM_g(x, r) & \text{pour } r \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

D'où, grâce à (2.14) et du fait que  $M_f$  et  $M_g$  sont paires en  $r$  :

$$\begin{aligned} M_u(x, r, t) &= \frac{1}{r}v(r, t) \\ &= \frac{1}{2r} \left( (ct + r)M_f(x, ct + r) - (ct - r)M_f(x, ct - r) \right) + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct+r} \rho M_g(x, \rho) d\rho . \end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre  $r$  vers 0, on obtient la représentation suivante d'une solution  $u$  de (2.16) pour  $d = 3$ .

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( t M_f(x, ct) \right) + t M_g(x, ct) , \tag{2.18}$$

et la *formule de KIRCHHOFF* pour le problème (2.16) en dimension 3

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} g(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} f(y) dS_y \right) \tag{2.19}$$

Toute solution du problème (2.16) en dimension 3 qui est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ , est donnée par la formule (2.19) et est donc unique.

Réciproquement, pour  $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$  et  $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ , la fonction définie par la formule de KIRCHHOFF (2.19), est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$  et est solution de (2.16).

Grâce au changement de variables  $y = x + ct \xi$ , l'équation (2.19) devient

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{|\xi|=1} \left( t g(x + ct \xi) + f(x + ct \xi) + ct \nabla f(x + ct \xi) \cdot \xi \right) dS_\xi . \tag{2.20}$$

**Remarques :**

1) Les formules (2.18) et (2.20) montrent que l'on perd de la régularité.

En effet si  $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathbb{R})$ , alors  $M_f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^2)$  et  $M_g \in \mathcal{C}^{\alpha-1}(\mathbb{R}^2)$  et  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^{\alpha-1}$  pour  $t > 0$ .

Donc  $u$  est moins régulière que sa valeur initiale  $u(x, 0)$  ou, autrement dit, des petites irrégularités dans la condition initiale  $f$  peuvent s'accumuler en  $t > 0$  et rendre  $u(\cdot, t)$  moins régulière.

Il est intéressant d'étudier le comportement de  $u$  par rapport à une énergie

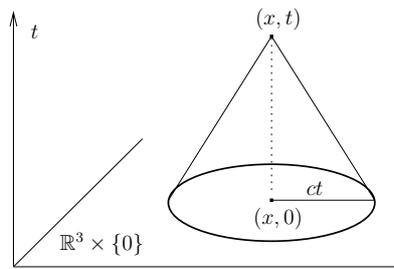
$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left( u_t(x, t)^2 + c^2 |\nabla u(x, t)|^2 \right) dx .$$

On montre que  $\frac{dE}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} \left( u_t(u_{tt} - \Delta u) + c^2 \operatorname{div}(u_t \nabla u) \right) dx$ .

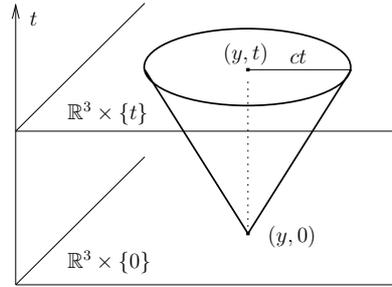
Si on suppose que  $|u_t(x, t) \nabla u(x, t)| \leq \frac{1}{1 + |x|^3}$ , on a  $\frac{dE}{dt}(t) = 0$  pour tout  $t > 0$ .

En particulier, si  $u = 0$  pour  $|x|$  grand, le comportement  $L^2$  ne change pas avec  $t$ .

- 2) Grâce à (2.20) on constate que la valeur de  $u(x, t)$  dépend des valeurs de  $f$  et  $g$  pour  $y \in S^2(x, ct)$ . Donc pour  $d = 3$  le *domaine de dépendance* est la surface  $S^2(x, ct)$ .



Domaine de dépendance



Cône d'influence

Réciproquement, les données initiales au point  $(y, 0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$  n'ont de l'influence sur  $u$  à l'instant  $t$  qu'aux points  $x \in \mathbb{R}^3$  qui vérifient  $|y - x| = ct$ .

Le *cône d'influence* de  $(y, 0)$  est la surface dans l'espace-temps  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ , formée par le cône de sommet  $(y, 0)$  et d'axe de symétrie  $\{(y, t)/t \geq 0\}$ , c'est-à-dire l'ensemble  $\{(x, t) / |y - x| = ct, t > 0\}$ .

- 3) Supposons que le support de  $f$  et  $g$  est  $\Omega = \overline{B}_3(0, r) \subset \mathbb{R}^3$ .

Pour que  $u(x, t)$  soit non nul il faut que  $x \in S^2(y, ct)$  avec  $y \in \Omega$ .

Or l'union de toutes les sphères de centre  $y \in \Omega$  et de rayon  $ct$  est la sphère de centre 0, de rayon  $ct$  et d'épaisseur  $2r$ .

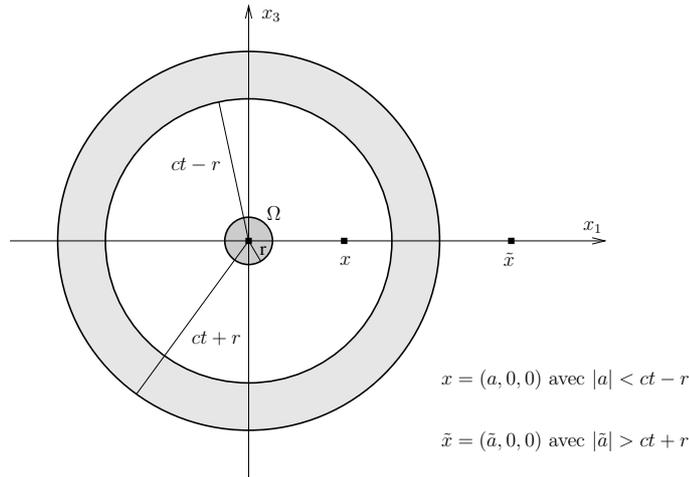
Donc  $\operatorname{supp}(u) = \overline{B}_3(0, ct + r) \setminus B_3(0, ct - r)$  et on constate que le support de  $u$ , dans  $\mathbb{R}^3$ , se répand à la vitesse finie  $c$ .

Pour  $x$  fixé et pour tout  $t < t_1 = (|x| - r)/c$  et  $t > t_2 = (|x| + r)/c$  on a  $u(x, t) = 0$  : le *front d'onde* arrive en  $x$  à l'instant  $t_1$  et à partir de l'instant  $t_2$  l'onde est passée.

Dans  $\mathbb{R}^3$  on a le

*Principe (fort) de HUYGENS* : le domaine de dépendance est une surface dans  $\mathbb{R}^3$ .

Cette propriété permet la modélisation par l'équation des ondes de la transmission de signaux à vitesse finie dans  $\mathbb{R}^3$ .



Coupe de  $\mathbb{R}^3$  suivant  $x_1x_3$  à l'instant  $t$

4) Pendant que le support de  $u$  se répand  $u$  décroît en  $1/t$ .

En effet  $u(x, t)$  dépend des valeurs de  $f$  et  $g$  sur  $S^2(x, ct) \cap \overline{B}_3(0, r)$ . Comme l'aire maximale de cette intersection est l'aire de  $S^2(0, r) = 4\pi r^2$ , et en supposant que  $g, f$  et ses dérivées partielles d'ordre 1 sont bornés, on a grâce à (2.20)

$$|u(x, t)| \leq \frac{r^2}{c^2 t^2} \left( t \sup_{\Omega} |g| + \sup_{\Omega} |f| + ct \sup_{\Omega} |\nabla f| \right) \approx \frac{1}{t} \text{ pour } t \text{ grand.}$$

### 2.4.5 Équation des ondes dans $\mathbb{R}^2$

Pour obtenir la solution de l'équation des ondes pour  $d = 2$  nous allons utiliser la *méthode de descente de HADAMARD* :

La solution de l'équation aux dérivées partielles dans  $\mathbb{R}^2$  est considérée comme étant une solution de l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}^3$  indépendante de la variable  $x_3$ .

La solution  $u(x_1, x_2, t)$  est donnée par la formule de KIRCHHOFF (2.19) avec  $x_3 = 0$ .

Les conditions initiales sont  $f(y) = f(y_1, y_2)$  et  $g(y) = g(y_1, y_2)$ .

Pour  $\tilde{x} = (x_1, x_2, 0)$ ,  $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3)$  on a  $ct = |\tilde{y} - \tilde{x}| = \sqrt{(\tilde{y}_1 - x_1)^2 + (\tilde{y}_2 - x_2)^2 + \tilde{y}_3^2}$ .

L'intégrale sur les points  $\tilde{y}$  de la sphère  $S^2(\tilde{x}, ct)$  devient une intégrale sur les  $y = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$  du disque  $B_2(x, ct)$ , où  $x = (x_1, x_2)$ .

On obtient la formule de POISSON pour l'équation des ondes en dimension deux

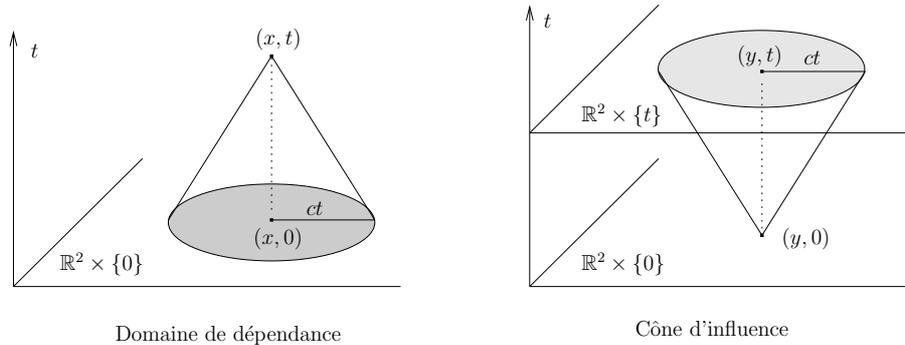
$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x|<ct} \frac{g(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x|<ct} \frac{f(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right).$$

**Remarques :**

1) Le *domaine de dépendance* de  $(x, t)$  est le disque  $B_2(x, ct)$ .

Réciproquement, les données initiales en un point  $(y, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  ont de l'influence à l'instant  $t$  sur tous les points de  $B_2(y, ct)$ .

Le *cône d'influence* est le cône solide dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  :  $\{(x, t) / |y - x| \leq ct, t > 0\}$ .



Les perturbations en un point  $x \in \mathbb{R}^2$  vont durer indéfiniment : dans  $\mathbb{R}^2$  on ne peut pas transmettre de l'information.

2) Comparer le comportement des solutions de l'équation de la chaleur et de l'équation des ondes ( $d = 1, 2$  et  $3$ ).

### 2.4.6 Méthode de Duhamel pour l'équation des ondes non homogène

On s'intéresse au problème 
$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = w(x, t) & \text{sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Grâce à la linéarité il suffit d'étudier le problème avec conditions initiales homogènes

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = w(x, t) & \text{sur } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (2.21)$$

On a la

#### PROPOSITION 2.4.1

La solution du problème (2.21) est donnée par

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t, s) ds \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \text{ et } t \geq 0,$$

où  $U(x, t, s)$  est, pour tout  $s \geq 0$ , solution de

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 \Delta U & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, t > s \geq 0 \\ U(x, s, s) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, t = s \\ U_t(x, s, s) = w(x, s) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, t = s. \end{cases}$$

La méthode de DUHAMEL permet de réduire le problème (2.21) en une succession de problèmes homogènes.

Si on pose  $V(x, t, s) = U(x, t + s, s)$  on a 
$$\begin{cases} V_{tt} = c^2 \Delta V & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ V(x, 0, s) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, t = 0. \\ V_t(x, 0, s) = w(x, s) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d, t = 0 \end{cases}$$

Or on peut calculer  $V$  en dimension un, deux et trois :

- solution de (2.21) pour  $d = 1$  ; on a  $V(x, t, s) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} w(y, s) dy$ ,

d'où 
$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{|y-x| < c(t-s)} w(y, s) dy ds ;$$

- solution de (2.21) pour  $d = 2$ , on a  $V(x, t, s) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| < ct} \frac{w(y, s)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy$ ,

d'où 
$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \int_{|y-x| < c(t-s)} \frac{w(y, s)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy ds ;$$

- solution de (2.21) pour  $d = 3$ , on a  $V(x, t, s) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} w(y, s) dS_y$ ,

on obtient 
$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{|y-x| < ct} \frac{w(y, t - \frac{1}{c}|y-x|)}{|y-x|} dy \quad (\text{potentiel retardé}).$$

## 2.5 Classification des e.d.p. linéaires d'ordre 2

Pour  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , une équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2 s'écrit en tout point  $x$  de  $\Omega$  :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x) u(x) = d(x), \quad (2.22)$$

où l'on peut supposer  $a_{ij} = a_{ji}$ , pour tout  $1 \leq i, j \leq d$ .

On définit le *symbole* de l'équation aux dérivées partielles (2.22), en  $x \in \Omega$  et pour tout  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ , par

$$\Lambda_x(\xi) = \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j.$$

Pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\Lambda_x$  est une forme quadratique de matrice associée  $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq d}$ .

Considérons un difféomorphisme  $\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  avec  $\tilde{x} = \Phi(x)$  et  $\det(D\Phi) = \left| \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} \right|_{1 \leq i, j \leq d} \neq 0$ .

Pour  $x_*$  fixé, on pose  $P = D\Phi_{x_*}^t$ , i.e.  $p_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}(x_*)$ , alors

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij}(x_*) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_*) &= \sum_{1 \leq k, l \leq d} \left( \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij}(x_*) p_{lj} p_{ki} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_l}(x_*) + (\text{termes d'ordre 1}) \\ &= \sum_{1 \leq k, l \leq d} \tilde{a}_{kl}(\tilde{x}_*) \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_l}(\tilde{x}_*) + (\text{termes d'ordre 1}). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que les coefficients d'ordre deux de l'équation aux dérivées partielles (2.22) sont transformés de la même façon que les coefficients de la forme quadratique  $\Lambda_{x_*}$  sous la transformation  $\xi = P\eta$  : on a  $\Lambda_{\tilde{x}_*}(\eta) = \eta^t P^t A(x_*) P \eta$ .

Or, grâce à un changement de variables adapté, une forme quadratique réelle peut être réduite à sa forme canonique :

$$\sum_{i=1}^m \eta_i^2 - \sum_{i=m+1}^r \eta_i^2,$$

où  $1 \leq m \leq r \leq d$ . Donc, en un point  $x_* \in \Omega$  donné, l'équation aux dérivées partielles (2.22) peut toujours s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_i^2}(\tilde{x}_*) - \sum_{i=m+1}^r \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_i^2}(\tilde{x}_*) + \sum_{i=1}^d \tilde{b}_i(\tilde{x}_*) \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_i}(\tilde{x}_*) + \tilde{c}(\tilde{x}_*) u(\tilde{x}_*) = \tilde{d}(\tilde{x}_*).$$

## DÉFINITION 2.5.1

On dit que l'équation aux dérivées partielles (2.22) est :

- elliptique au point  $x_*$  si  $r = d$  et  $m = 0$  ou  $m = d$ , i.e.  $A(x_*)$  est définie positive ou négative et a  $d$  valeurs propres réelles non nulles de même signe ;
- hyperbolique au point  $x_*$  si  $r = d$  et  $m = 1$  ou  $m = d - 1$ , i.e.  $A(x_*)$  est indéfinie et a  $d$  valeurs propres réelles non nulles dont une de signe contraire aux  $d - 1$  autres ;
- parabolique au point  $x_*$  si  $r = d - 1$  et  $m = 0$  ou  $m = d - 1$ , i.e.  $A(x_*)$  a 0 comme valeur propre et  $d - 1$  valeurs propres réelles non nulles de même signe.

## Exemples :

1. L'équation de LAPLACE dans  $\mathbb{R}^d$  est elliptique en tout point :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{R}^d : \Lambda_x(\xi) = \sum_{i=1}^d \xi_i^2.$$

2. L'équation de la chaleur est parabolique en tout point :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*, \xi \in \mathbb{R}^{d+1} : \Lambda_{(x,t)}(\xi) = \sum_{i=1}^d \xi_i^2.$$

3. L'équation des ondes est hyperbolique en tout point :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^*, \xi \in \mathbb{R}^{d+1} : \Lambda_{(x,t)}(\xi) = \sum_{i=1}^d \xi_i^2 - \xi_{d+1}^2.$$

4. Pour l'équation de TRICOMI dans  $\mathbb{R}^2$  :  $x_2 u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0$ , on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \xi \in \mathbb{R}^2 : \Lambda_x(\xi) = x_2 \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Elle est donc elliptique si  $x_2 > 0$ , hyperbolique si  $x_2 < 0$  et parabolique si  $x_2 = 0$ .

5. L'équation  $u_{x_1 x_2} = 0$  est hyperbolique dans  $\mathbb{R}^2$ .

## Remarques :

1. Pour tout point  $x_* \in \mathbb{R}^d$  on a une transformation qui réduit (2.22) sous forme canonique or cette transformation dépend de  $x_*$ . Pour  $d \geq 3$  il est en général impossible de trouver un difféomorphisme  $\Phi$  qui permet d'écrire l'équation aux dérivées partielles sous forme réduite sur une région donnée (arbitrairement petite). Dans le cas  $d = 2$  et sous quelques hypothèses sur les coefficients de (2.22) on peut trouver  $\Phi$  qui permet de mettre (2.22) sous forme réduite.
2. La classification ci-dessus a été donnée pour des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre deux. On retrouve ces mêmes dénominations pour des équations aux dérivées partielles plus générales, mais qui partagent les propriétés essentielles avec les équations aux dérivées partielles linéaires présentées dans ce chapitre.

- On élargit la classe des équations aux dérivées partielles hyperboliques aux équations qui admettent des solutions de type ondes, *i.e.* on a une vitesse de propagation finie. Considérons par exemple le système d'équations aux dérivées partielles d'ordre un en  $t$

$$U_t(x, t) + AU_x(x, t) = F(x, t) \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,$$

où  $U = (u_1 \ \dots \ u_N)^t$  est défini sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  et  $A$  est une matrice constante d'ordre  $N \times N$ . On a un système hyperbolique à coefficients constants si  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

Cette définition se généralise au cas où  $A(x, t)$  et pour  $U : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

L'équation de transport est une équation aux dérivées partielles hyperbolique d'ordre un en  $t$ .

- Pour les équations aux dérivées partielles elliptiques à coefficients non constants on utilisera un critère uniforme, voir page 61.

# Chapitre 3

## Équations aux dérivées partielles d'ordre un

### 3.1 Introduction et notations

Dans ce chapitre on s'intéresse au problème suivant :

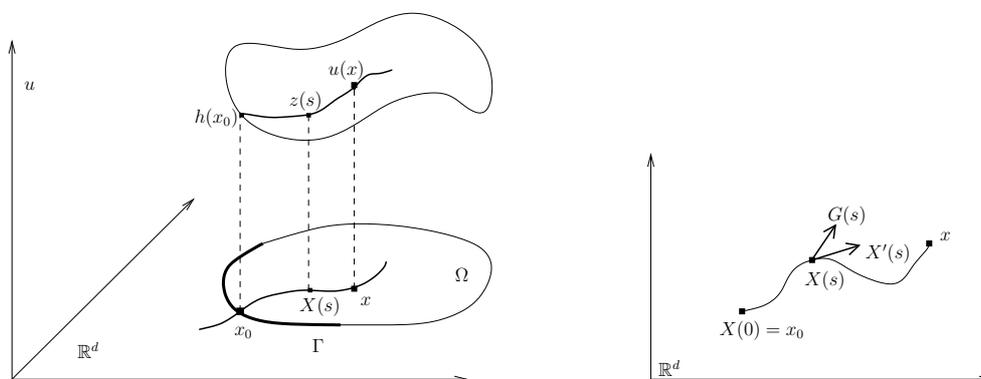
Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , on veut trouver  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  solution de

$$\begin{cases} F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 & \text{pour } x \in \Omega \\ u(x) = h(x) & \text{pour } x \in \Gamma \subset \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

On suppose que  $F$  et  $h$  sont au moins de classe  $\mathcal{C}^2$  et que  $\partial\Omega$  est une hypersurface régulière.

**Exemple :** Pour  $F(x, u, \nabla u) = v \cdot \nabla u - f = 0$ , avec  $v = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$ , on obtient l'équation de transport, cf. page 15, que l'on intègre sur les droites caractéristiques.

**Idée :** soit  $u$  une solution de (3.1) et  $x \in \Omega$ , comme pour l'équation de transport, on veut calculer  $u(x)$  à partir de  $u(x_0) = h(x_0)$ ,  $x_0 \in \Gamma$ , en intégrant le long d'un chemin  $X(s) \subset \Omega$ .



**Notations :** soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle, on définit

$$\begin{aligned} X : I &\longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^d & z : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto X(s) = (x_1(s), \dots, x_d(s)) & s &\longmapsto z(s) = u(X(s)) \end{aligned}$$

$$\text{et } G : I \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ s \longmapsto G(s) = \left( g_1(s), \dots, g_d(s) \right) = \nabla u(X(s)).$$

Sur la courbe  $X$  l'équation (3.1) devient :  $F\left(x_1(s), \dots, x_d(s), z(s), g_1(s), \dots, g_d(s)\right) = 0$ .

$$\text{On note } \nabla_X F = \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ \vdots \\ F_{x_d} \end{pmatrix} \text{ et } \nabla_G F = \begin{pmatrix} F_{g_1} \\ \vdots \\ F_{g_d} \end{pmatrix}.$$

## 3.2 Étude du cas général

Pour une solution  $u$  de (3.1), le théorème qui suit fait le lien entre la courbe paramétrée  $X$ , la valeur de  $u$  sur  $X$ ,  $z$ , et la valeur du gradient de  $u$  le long de  $X$ ,  $G$ .

**THÉORÈME 3.2.1 (SYSTÈME CARACTÉRISTIQUE)**

Soit  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  une solution de (3.1). Si  $X$  est solution de

$$X'(s) = \nabla_G F(X(s), z(s), G(s)) \quad (3.2.1)$$

alors, pour tout  $s$  tel que  $X(s) \in \Omega$ ,  $z$  et  $G$  sont solution de

$$z'(s) = \nabla_G F(X(s), z(s), G(s)) \cdot G(s) \quad (3.2.2)$$

$$G'(s) = -\nabla_X F(X(s), z(s), G(s)) - F_z(X(s), z(s), G(s)) G(s) \quad (3.2.3)$$

**Remarques :**

1. Les  $2d+1$  équations différentielles ordinaires (3.2.1-3) forment le *système d'équations caractéristiques* associé à l'équation aux dérivées partielles d'ordre un (3.1).
2. Les fonctions  $X$ ,  $z$  et  $G$  sont appelées les *caractéristiques* et  $X$  est la *projection des caractéristiques* ou la *courbe caractéristique*.

Si l'on se donne des conditions initiales  $(X(0), z(0), G(0))$ , alors, grâce à la régularité de  $F$ , on a existence d'une solution locale unique  $(X, z, G)$  du système autonome d'équations différentielles ordinaires caractéristiques.

Donc, pour obtenir  $u$ , solution de (3.1), il faut résoudre (3.2.1-3) pour  $X(0) = x_0 \in \Gamma$ .

En un premier temps, pour simplifier l'étude, on va montrer que l'on peut supposer que  $\Gamma$  est plat au voisinage de  $x_0$ .

En effet, comme  $\partial\Omega$  est régulier il est possible d'aplatir  $\Gamma$  au voisinage de  $x_0$ , cf. annexe B. Il existe  $\Phi$ , difféomorphisme de  $\mathbb{R}^d$ , et  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $y \in \Gamma \cap B_d(x_0, \varepsilon)$  :

$$\Phi(y) = (y_1, \dots, y_{d-1}, 0).$$

Si on pose  $\tilde{x} = \Phi(x)$  et  $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(\Phi^{-1}(\tilde{x}))$ , alors  $\tilde{u}$  vérifie l'équation aux dérivées partielles d'ordre un

$$\begin{cases} \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{u}, \nabla \tilde{u}) = 0 & \text{pour } \tilde{x} \in \Phi(\Omega) \\ \tilde{u} = \tilde{h} & \text{pour } \tilde{x} \in \Phi(\Gamma). \end{cases}$$

Donc, si  $\Gamma$  est plat au voisinage de  $x_0$ , les conditions initiales en  $x_0$  sont :

$$X(0) = x_0, \quad z(0) = h(x_0) = h(x_1^0, \dots, x_{d-1}^0, 0) \quad \text{et} \quad G(0) = p_0.$$

Or pour  $x_0 \in \Gamma$  donné,  $z(0) = h(x_0)$  est unique, il reste à trouver  $p_0$ .

En dérivant  $u(y_1, \dots, y_{d-1}, 0) = h(y_1, \dots, y_{d-1})$  en  $x_0$  et en notant  $p_0 = (p_1^0, \dots, p_d^0) = G(0)$ , on obtient

$$\begin{cases} p_i^0 = h_{x_i}(x_0), & \text{pour } i = 1, \dots, d-1 \\ F(x_0, h(x_0), p_1^0, \dots, p_d^0) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

On dit que  $(x_0, h(x_0), p_0)$  est admissible si  $p_0 = (p_1^0, \dots, p_d^0)$  est solution de (3.3).

Or on veut résoudre (3.1) dans un voisinage de  $x_0$ .

Donc, pour tout  $y = (y_1, \dots, y_{d-1}, 0) \in \Gamma \cap B_d(x_0, \varepsilon)$ , on va résoudre (3.2.1-3) avec les conditions initiales  $X(0) = y$ ,  $z(0) = h(y)$  et  $G(0) = q(y)$ .

Il faut donc trouver  $q : \Gamma \cap B_d(x, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que

$$q(x_0) = p_0, \tag{3.4}$$

où  $p_0$  vérifie (3.3).

De plus il faut assurer que  $(y, h(y), q(y))$  est admissible, d'où

$$\begin{cases} q_i(y) = h_{x_i}(y), & \text{pour } i = 1, \dots, d-1 \\ F(y, h(y), q_1(y), \dots, q_d(y)) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

et on a le lemme suivant qui assure l'existence de  $q$  :

LEMME 3.2.1

Soit  $(x_0, h(x_0), p_0)$  admissible et supposons que

$$F_{g_d}(x_0, h(x_0), p_0) \neq 0.$$

Alors il existe une solution unique  $q$  de (3.4) et (3.5).

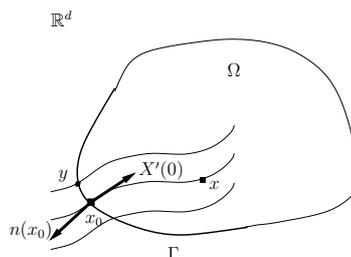
La condition  $F_{g_d}(x_0, h(x_0), p_0) = X'_d(0) \neq 0$ , du lemme précédent signifie que le champ de vecteurs  $X'$  est transverse à  $\Gamma$  en  $x_0$ .

Si  $\Gamma$  n'est pas plat au voisinage de  $x_0$  cette condition devient

$$\nabla_G F(x_0, h(x_0), p_0) \cdot n(x_0) \neq 0, \quad \parallel$$

où  $n(x_0)$  est la normale à  $\Gamma$  en  $x_0$ . On dit que  $\Gamma$  est non caractéristique en  $x_0$  pour (3.1).

Dans ce cas  $X'(0) \cdot n(x_0) \neq 0$ , c'est-à-dire  $X'(0) \notin T_{x_0}\Gamma$ .



Finalement, on montre qu'en «recollant» les solutions de (3.2.1-3) pour des conditions initiales admissibles, on obtient une solution locale unique de (3.1) et on a le

**THÉORÈME 3.2.2 (EXISTENCE LOCALE)**

Soit  $x_0 \in \Gamma$ ,  $(x_0, h(x_0), p_0)$  admissible et  $\nabla_G F(x_0, h(x_0), p_0) \cdot n(x_0) \neq 0$ .

Alors il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^d$  et une fonction unique  $u \in \mathcal{C}^2(V)$ , tels que

$$\begin{cases} F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 & \text{pour } x \in V \\ u(x) = h(x) & \text{pour } x \in V \cap \Gamma. \end{cases}$$

**3.3 Cas linéaire et quasilinéaire****• équation aux dérivées partielles linéaire d'ordre un :**

On a la forme générale

$$F(x, u, \nabla u) = a(x) \cdot \nabla u(x) + b(x)u(x) + c(x) = 0.$$

Comme  $\nabla_G F = a(x)$ ,  $\Gamma$  est non caractéristique en  $x_0 \in \Gamma$  si  $a(x_0) \cdot n(x_0) \neq 0$ .

Les équations différentielles ordinaires (3.2.1) et (3.2.2) donnent le système caractéristique réduit

$$\begin{cases} X'(s) = a(X(s)) \\ z'(s) = -b(X(s))z(s) - c(X(s)). \end{cases} \quad (3.6)$$

Ce système différentiel est indépendant de  $G$  et grâce au résultat d'unicité d'une solution locale régulière il suffit d'intégrer (3.6) pour obtenir cette solution.

**Exemple :** On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} = u & \text{dans } (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ u(x) = h(x) & \text{pour } x \in \Gamma = \mathbb{R}_+^* \times \{0\}. \end{cases}$$

On montre que pour tout  $x_0 > 0$ ,  $a(x_0, 0) \cdot n(x_0, 0) = x_0 > 0$ , donc  $\Gamma$  est partout non caractéristique. Les courbes caractéristiques sont des quarts de cercles et la solution du problème est

$$\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : u(x_1, x_2) = h\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) e^{\arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}.$$

**• équation aux dérivées partielles quasilinéaire d'ordre un :**

La forme générale est

$$F(x, u, \nabla u) = a(x, u) \cdot \nabla u(x) + b(x, u) = 0.$$

On a  $\nabla_G F = a(x, u)$  et  $\Gamma$  est non caractéristique en  $x_0 \in \Gamma$  si  $a(x_0, h(x_0)) \cdot n(x_0) \neq 0$ .

Le système caractéristique réduit s'écrit

$$\begin{cases} X'(s) = a(X(s), z(s)) \\ z'(s) = -b(X(s), z(s)). \end{cases} \quad (3.7)$$

Comme dans le cas linéaire, il suffit de résoudre (3.7) pour trouver la solution régulière locale.

**Exemple :** On considère l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} u_{x_1} + u_{x_2} = u^2 & \text{dans } \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u = h & \text{sur } \Gamma = \mathbb{R} \times \{0\} . \end{cases}$$

On montre que  $\Gamma$  est non caractéristique en tout point et que les courbes caractéristiques sont des droites. La solution est donnée par

$$u(x_1, x_2) = \frac{h(x_1 - x_2)}{1 - x_2 h(x_1 - x_2)} \quad \text{pour tout } (x_1, x_2) \in \Omega \text{ tant que } x_2 h(x_1 - x_2) \neq 1 .$$

Dans la suite on va étudier d'autres cas où la solution n'existe pas dans tout  $\Omega$ .

## 3.4 Lois de conservation scalaires

Dans cette section on s'intéresse à un type particulier d'équations aux dérivées partielles quasilineaires d'ordre un, les *lois de conservation scalaires*. Ce sont des problèmes de la forme

$$u_t(x, t) + f(u(x, t))_x = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad (3.8)$$

où  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  et avec  $u(x, 0) = h(x)$ .

### 3.4.1 Modélisation

On considère des particules en déplacement le long de l'axe  $Ox$ ;  $u(x, t)$  est la densité de particules en  $x$  à l'instant  $t$ . Soit  $\Omega = ]a, b[$ , on pose

$$m_\Omega(t) = \int_a^b u(x, t) dx .$$

On suppose que la variation de masse dans  $\Omega$  est uniquement due au flux de particules,  $f(u)$ , en  $x = a$  et  $x = b$ . En tenant compte du signe du flux on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_\Omega(t) &= \int_a^b u_t(x, t) dx \\ &= f(u(a, t)) - f(u(b, t)) = - \int_{\partial\Omega} f(u) \cdot n \, d\sigma \\ &= - \int_a^b f(u)_x \, dx = - \int_\Omega \operatorname{div}(f(u)) \, dx . \end{aligned}$$

En supposant que  $u$  est régulier et comme  $\Omega$  est quelconque, on obtient la loi de conservation de la masse

$$u_t + f(u)_x = 0 .$$

Si l'on se donne la vitesse  $v$  des particules alors  $f(u) = vu$  ( $[p/s] = [p/m][m/s]$ ).

**Exemples :**

1. Si la vitesse est constante,  $v = c$ , on retrouve l'équation de transport.
2. Si on modélise le trafic routier, une relation simple entre la densité du trafic  $u$  et la vitesse des voitures (ou vélos)  $v$  est

$$v = v_{max} \left( 1 - \frac{u}{u_{max}} \right),$$

Pour une route vide ( $u = 0$ ) la vitesse est  $v_{max}$  mais la vitesse décroît vers 0 quand le trafic arrive à saturation ( $u = u_{max}$ ), le flux est

$$f(u) = u v_{max} \left( 1 - \frac{u}{u_{max}} \right).$$

Des expériences américaines, menées en 1959 dans un tunnel, ont conclu que le flux de véhicules  $y$  pouvait être modélisé par  $f(u) = au \ln(u_{max}/u)$ .

**3.4.2 Étude de l'équation de Burger's****Modélisation :**

On considère des particules en déplacement le long de l'axe  $Ox$ ,  $v(x, t)$  est la vitesse de la particule qui se trouve en  $x$  à l'instant  $t$ . On se donne la vitesse initiale  $h(x) = v(x, 0)$ .

On considère une particule  $X$  qui se trouve en  $x_0 = X(0)$  pour  $t = 0$  et en  $x = X(t)$  à l'instant  $t$ , alors  $v(X(t), t)$  est la vitesse de la particule  $X$  à l'instant  $t$ . En particulier  $v(x_0, 0) = v(X(0), 0) = h(x_0)$ .

Supposons que chaque particule se déplace à vitesse constante :  $v(X(t), t) = h(X(0))$ .

En dérivant par rapport à  $t$  (à «particule fixe»), on a :  $v_x \frac{d}{dt} X(t) + v_t = v_x v + v_t = 0$ .

On obtient ainsi l'équation de BURGER's pour des fluides non visqueux :

$$\begin{cases} v_t + vv_x = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ v(x, 0) = h(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.9)$$

C'est une équation du type (3.8) avec  $f(v) = \frac{1}{2}v^2$ .

**Étude de l'équation :**

$\Gamma = \mathbb{R} \times \{t = 0\}$  et on montre que  $\Gamma$  est non caractéristique en tout point  $(x, 0)$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  il existe un voisinage de  $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$  dans lequel (3.9) admet une solution unique régulière.

$$\text{Le système caractéristique s'écrit : } \begin{cases} x'(s) = z \\ t'(s) = 1 \\ z'(s) = 0 \end{cases} \text{ avec les c.i. } \begin{cases} x(0) = x_0 \\ t(0) = 0 \\ z(0) = h(x_0) \end{cases}.$$

Les courbes caractéristiques sont les droites passant par  $(x_0, 0)$  d'équation  $x = x_0 + h(x_0)t$  et le long desquelles  $v(x, t) = h(x_0)$ .

Une droite caractéristique représente le chemin dans l'espace-temps de la particule  $X$ , partie de  $x_0 = X(0)$ .

Comme  $v(x, t) = h(x_0) = h(x - h(x_0)t) = v(x - v(x, t)t)$ , la solution de (3.9) vérifie l'équation implicite

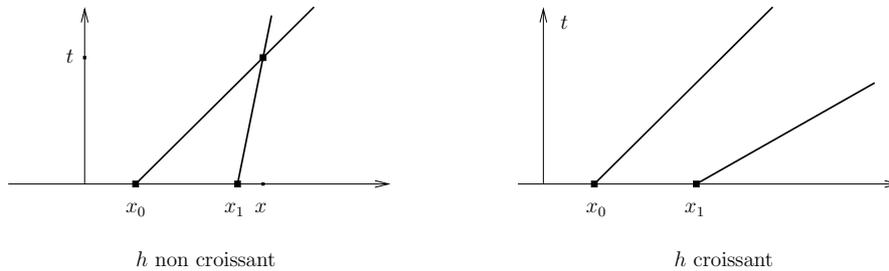
$$v = h(x - vt).$$

Supposons qu'une deuxième particule  $X_1$ ,  $X_1(0) = x_1 > x_0$ , se trouve à l'instant  $t$  en  $x$  :

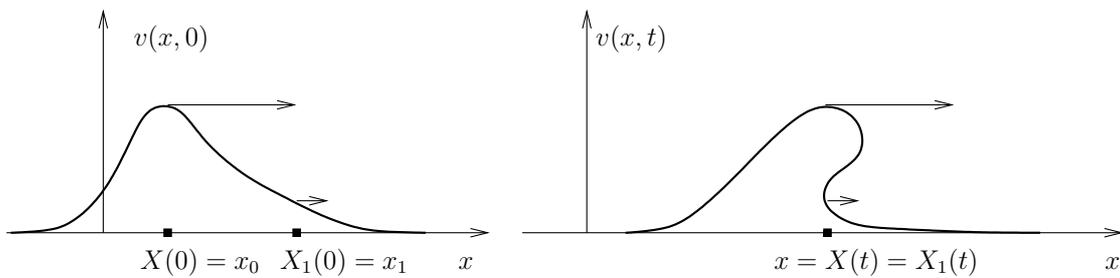
$$x = x_0 + h(x_0)t = x_1 + h(x_1)t \quad \text{donc si } h(x_0) \neq h(x_1) : \quad t = -\frac{x_1 - x_0}{h(x_1) - h(x_0)}.$$

Si  $h$  est croissante il n'existe pas de  $t > 0$  vérifiant cette relation.

Si  $h$  n'est pas croissante un tel instant  $t > 0$  existe et  $v$  n'est plus une fonction,  $v(x, t)$  devant être égal à  $h(x_0)$  et  $h(x_1)$ .



Les particules rapides (vitesse  $h(x_0)$ ) vont rattraper les particules lentes (vitesse  $h(x_1)$ ).



Calculons  $v_x$  le long d'une droite caractéristique :  $v_x = \frac{h'(x_0)}{1 + h'(x_0)t}$ .

Donc si  $h'(x_0) < 0$  pour  $t \xrightarrow{<} -\frac{1}{h'(x_0)}$  on a  $|v_x|$  qui tend vers l'infini.

Le premier instant où  $v$  n'est plus défini correspond à  $T = \min_{x \in \mathbb{R}} \left( -\frac{1}{h'(x)} \right) = -\frac{1}{h'(x^*)}$ ,

où  $x^*$  est un minimum de  $h'$ . On dit que la solution explose (angl. *blow-up*) en  $T$ .

Il ne peut y avoir de solution  $\mathcal{C}^1$  au delà de l'instant  $T$ .

Pour pouvoir définir des solutions au delà de  $T$ , *i.e.* sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , il faut introduire des solutions généralisées.

### 3.4.3 Solutions faibles et chocs

Soit la fonction test  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ , en supposant  $u$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et en multipliant (3.8) par  $\phi$  on obtient par intégration par parties

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u_t + f(u)_x) \phi \, dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( -u(x, 0) \phi(x, 0) \right) dx - \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} u \phi_t \, dt dx - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(u) \phi_x \, dx dt \end{aligned}$$

Cette dernière relation est valable si  $u$  n'est pas  $\mathcal{C}^1$ , d'où la

#### DÉFINITION 3.4.1

On dit que  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  est une solution faible du problème

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = h(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.10)$$

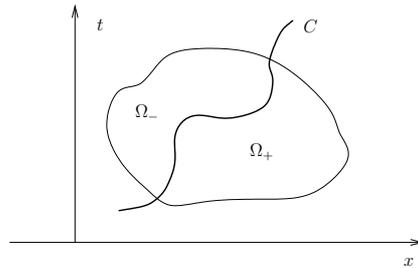
si pour toute fonction test  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  on a

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u \phi_t + f(u) \phi_x) \, dx dt = - \int_{\mathbb{R}} h(x) \phi(x, 0) \, dx \quad (3.11)$$

Nous allons étudier les solutions généralisées pour un cas particulier simple.

Soit  $u$  une solution généralisée de (3.10) dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , et  $C$  une courbe régulière qui partage  $\Omega$  en  $\Omega_-$  à gauche et  $\Omega_+$  à droite de  $C$ .

On va supposer que  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega_-$  et sur  $\Omega_+$ ,  $C$  est l'ensemble de discontinuité de  $u$ .



En choisissant les fonctions test à support compact dans  $\Omega_-$ , resp.  $\Omega_+$ , on montre que  $u$  est une solution forte de (3.10) dans  $\Omega_-$ , resp.  $\Omega_+$ .

Pour une fonction test  $\phi$  dont le support est partagé en deux par  $C$  on trouve en utilisant la relation (3.11)

$$\int_C \left( (f(u_-) - f(u_+)) n_1 + (u_- - u_+) n_2 \right) \phi \, d\sigma = 0,$$

où  $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$  est le vecteur normal unité extérieur à  $\Omega_-$  et  $u_-$ , resp.  $u_+$ , est la limite de  $u$  à gauche, resp. à droite, de  $C$ .

Si  $(\xi(t), t) = (x, t)$ ,  $t \in [0, +\infty[$ , est une paramétrisation de  $C$ , on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left( (f(u_-(t)) - f(u_+(t))) - (u_-(t) - u_+(t))\xi'(t) \right) \phi(\xi(t), t) dt = 0.$$

Comme  $\phi$  est quelconque, on en déduit la condition de RANKINE-HUGONIOT

$$\xi' = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \quad \parallel \quad \text{(RH)}$$

qui fait le lien entre la *vitesse de propagation de la discontinuité*  $\xi$  et la valeur du *saut* de  $u$ , resp.  $f(u)$ , en  $(\xi(t), t)$ .

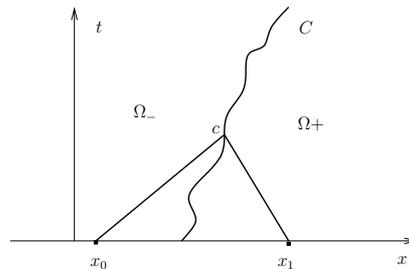
On voit sur des exemples que la condition de RANKINE-HUGONIOT permet en général plusieurs solutions généralisées. Nous allons introduire une contrainte supplémentaire pour éliminer des solutions «non physiques».

Le système caractéristique de (3.10) s'écrit 
$$\begin{cases} x'(s) = f'(z) \\ t'(s) = 1 \\ z'(s) = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que  $u(x, t) = h(x_0)$  le long des droites caractéristiques  $x = x_0 + f'(h(x_0))t$ , tant que  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Considérons  $c \in C$  avec  $u_-(c) \neq u_+(c)$  et tel que  $c$  est le premier point de rencontre d'une droite caractéristique venant de  $(x_0, 0) \in \Omega_-$  avec une droite caractéristique venant de  $(x_1, 0) \in \Omega_+$ .

Alors  $u_-(c) = h(x_0)$  et  $u_+(c) = h(x_1)$ .



On introduit alors la condition d'entropie :

$$f'(u_-) > \xi' > f'(u_+) \quad \parallel \quad \text{(E)}$$

*i.e.* à chaque instant la vitesse du flux à gauche de la discontinuité est plus grande qu'à droite.

**DÉFINITION 3.4.2**

Une discontinuité  $C$  est un choc si les conditions (RH) et (E) sont vérifiées.

### 3.4.4 Application : modèle de trafic routier

On reprend l'exemple du trafic routier où  $u(x, t)$  est la densité de voitures et vélos, et  $v(x, t)$  la vitesse en  $x$  à l'instant  $t$ . La distribution initiale de véhicules est donnée par  $u(x, 0) = h(x)$ , où  $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  et il n'y a ni bretelles d'accès, ni bretelles de sortie sur cette route.

En supposant que  $v = 1 - u$ , i.e.  $u_{max} = v_{max} = 1$ , on a  $f(u) = u(1 - u)$ ,  $f'(u) = 1 - 2u$  et on obtient

$$\begin{cases} u_t + (u(1 - u))_x = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = h(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Les droites caractéristiques ont pour équation :  $x = x_0 + (1 - 2h(x_0))t$ .

Si  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  on sait qu'il existe une solution unique  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times ]0, T[)$ , pour  $T = \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \frac{1}{2h'(x_0)}$ .

Si  $h$  est décroissante  $T = +\infty$ , i.e. initialement il y a plus de véhicules à gauche qu'à droite et les véhicules à gauche vont moins vite que ceux à droite et ne pourront jamais les rattraper.

Si  $h$  n'est pas décroissante à l'instant  $T$  la solution  $\mathcal{C}^1$  cesse d'exister : des véhicules à grande vitesse arrivent en une zone à grande densité et faible vitesse.

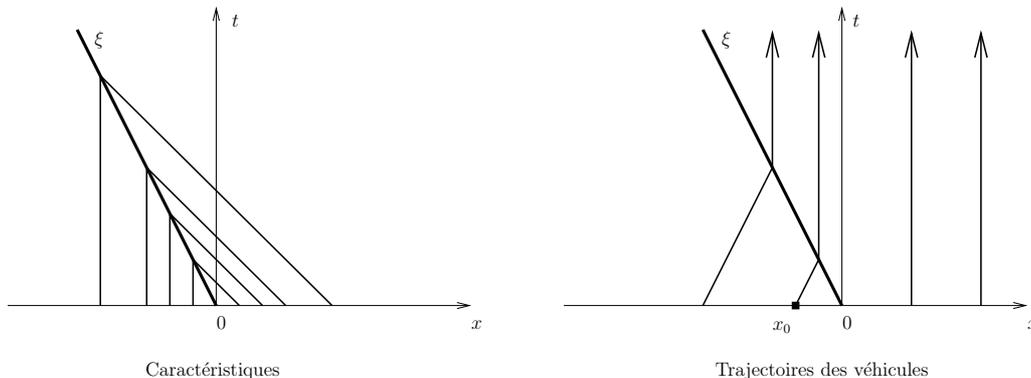
Considérons le problème (3.14) avec la condition initiale  $h(x_0) = u(x_0, 0) = \begin{cases} h_G & x_0 < 0 \\ h_D & x_0 > 0 \end{cases}$

un problème de ce type est appelé *problème de RIEMANN*.

En utilisant  $f$  et  $f'$  on montre que la condition (RH) s'écrit  $\xi' = 1 - (u_- + u_+)$ , la condition (E) devient ici  $u_- < u_+$ .

- Si  $h(x_0) = \begin{cases} 1/2 & x_0 < 0 \\ 1 & x_0 > 0 \end{cases}$ , alors  $\xi(t) = -\frac{t}{2}$  et  $u(x, t) = \begin{cases} 1/2 & x < -t/2 \\ 1 & x > -t/2 \end{cases}$ .

À droite de zéro il y a un bouchon ( $v = 0$ ) à l'instant  $t = 0$  et les véhicules venant de la gauche s'immobilisent au fur et à mesure que l'onde de choc  $\xi$  se déplace vers la gauche. Sur la figure suivante on a représenté, à gauche, les droites caractéristiques.



Sur la figure de droite sont représentés les trajectoires des véhicules, obtenues comme

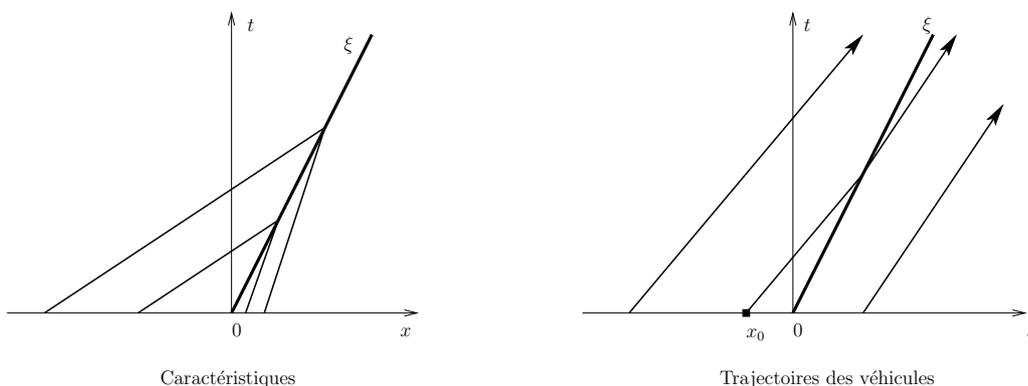
suit :

Notons  $X(t)$  la position à l'instant  $t$  d'un véhicule qui est parti en  $X(0) = x_0 < 0$ .

On connaît  $\frac{dX}{dt} = v(x, t)$ , en intégrant on obtient  $X(t) = \begin{cases} t/2 + x_0 & 0 \leq t < -x_0 \\ x_0/2 & t > -x_0 \end{cases}$ , représenté dans le plan  $xt$ .

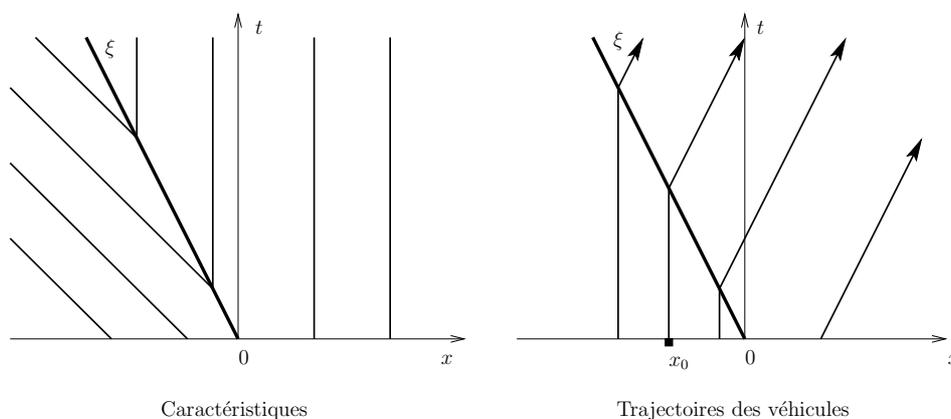
- Si  $h(x_0) = \begin{cases} 1/6 & x_0 < 0 \\ 1/3 & x_0 > 0 \end{cases}$ , on trouve  $u(x, t) = \begin{cases} 1/6 & x < t/2 \\ 1/3 & x > t/2 \end{cases}$ .

Dans ce cas l'onde de choc se déplace vers la droite, les véhicules rapides ( $v = 5/6$ ) venant de gauche doivent freiner pour rouler dans la zone dense à  $v = 2/3$ . On représente sur la figure suivante les droites caractéristiques et les trajectoires des véhicules.



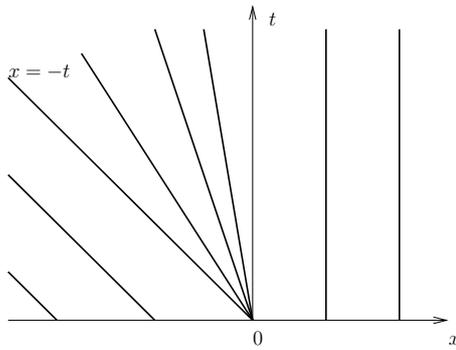
- Soit  $h(x_0) = \begin{cases} 1 & x_0 < 0 \\ 1/2 & x_0 > 0 \end{cases}$ , si on cherche une solution de (3.14) avec une discontinuité vérifiant  $(RH)$  on trouve  $u(x, t) = \begin{cases} 1 & x < -t/2 \\ 1/2 & x > -t/2 \end{cases}$ .

Cette discontinuité n'est pas un choc car  $(E)$  n'est pas vérifié. Les véhicules à gauche de zéro sont à l'arrêt et démarrent au fur et à mesure, leur vitesse passant instantanément de 0 à 1/2. On remarquera que les caractéristiques «sortent» de la discontinuité  $\xi$ .

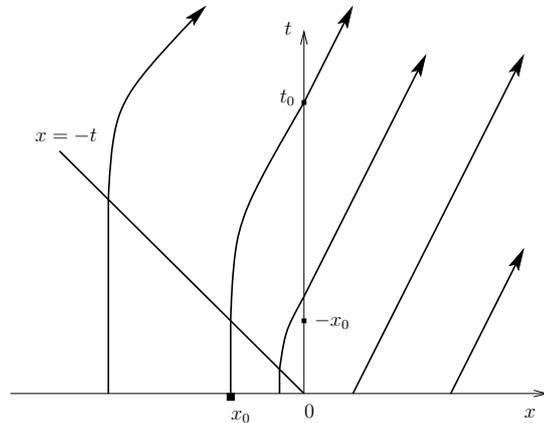


Un solution physiquement plus acceptable est  $u(x, t) = \begin{cases} 1 & x < -t \\ 1/2 - x/2t & -t < x < 0 \\ 1/2 & x > 0 \end{cases}$ .

Dans la zone  $\{(x, t) / t > 0, -t < x < 0\}$  on a un phénomène de *raréfaction*; pour pouvoir accélérer les véhicules doivent avoir de l'espace : la vitesse augmente de façon régulière de  $v = 0$  à  $v = 1/2$  et la densité diminue.



Caractéristiques



Trajectoires des véhicules

Le déplacement de la particule  $X(t)$  telle que  $X(0) = x_0 < 0$  est donné par

$$X(t) = \begin{cases} x_0 & 0 \leq t < -x_0 \\ -2\sqrt{-x_0}\sqrt{t} + t & -x_0 \leq t \leq t_0 = -4x_0 \\ t/2 + 2x_0 & t > t_0 \end{cases}.$$

# Chapitre 4

## Introduction aux éléments finis

Dans ce chapitre on s'intéresse uniquement à des problèmes linéaires elliptiques. On va étudier les solutions faibles et donner un résultat d'existence. On verra que les solutions faibles ne permettent pas seulement d'adapter le modèle à des données réelles non régulières mais que l'on peut aussi déduire un algorithme numérique de détermination de solutions approchées : *la méthode des éléments finis*.

Pour  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $\partial\Omega$  régulier, on considère l'équation de POISSON avec une condition de DIRICHLET homogène,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Supposons  $f$  continue,  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  et  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ . En multipliant l'équation aux dérivées partielles par  $v$  et en intégrant sur  $\Omega$  on trouve (après i.p.p.)

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (*)$$

Sous les hypothèses de régularité, citées ci dessus, (\*) est équivalent à l'équation aux dérivées partielles  $-\Delta u = f$ .

Or pour pouvoir écrire (\*) il suffit que  $u, v, f, u_{x_i}$  et  $v_{x_i}$  soient dans  $L^2(\Omega)$ . On obtient ainsi une formulation faible de  $-\Delta u = f$ . Il faudra cependant compléter cette formulation faible pour intégrer la condition de DIRICHLET homogène.

### 4.1 Espaces de Sobolev

Dans toute cette section  $\Omega$  sera un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .

DÉFINITION 4.1.1

On appelle espace de SOBOLEV sur  $\Omega$ , l'espace fonctionnel

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| \leq k : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\},$$

où  $D^\alpha u$  est la dérivée de  $u$  au sens des distributions.

On note  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ , en particulier

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \forall i \in \{1, \dots, d\} : u_{x_i} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

THÉORÈME 4.1.1

$$\begin{aligned} L'application \quad H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (u, v) &\longmapsto \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx \end{aligned}$$

est un produit scalaire et munit  $H^1(\Omega)$  d'une structure d'espace de HILBERT.

On note  $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$  la norme associée.

Rappelons que  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ .

On montre qu'en général  $\mathcal{D}(\Omega)$  n'est pas dense dans  $H^1(\Omega)$

et on introduit l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ , on note

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

**Exemples :**

1. Pour  $\Omega = \mathbb{R}^d$  on montre que  $H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$ .
2. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  avec  $\partial\Omega$  régulier. Si  $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  et  $u|_{\partial\Omega} = 0$  alors  $u \in H_0^1(\Omega)$ , c'est-à-dire qu'il existe une suite  $(\varphi_n)$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - \varphi_n\|_{H^1(\Omega)} = 0$ .

On interprète  $H_0^1(\Omega)$  comme l'espace des fonctions de  $H^1(\Omega)$  qui «s'annulent» sur  $\partial\Omega$ . On verra plus loin quel sens précis donner à cette affirmation.

PROPOSITION 4.1.1 (INÉGALITÉ DE POINCARÉ)

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , alors il existe une constante  $C(\Omega)$  telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} u^2 dx \leq C(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

**Remarque :** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et  $u = \alpha \mathbb{1}_{\Omega}$ , pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alors  $u \in H^1(\Omega)$  pour tout  $\alpha$  mais par l'inégalité de POINCARÉ on montre que  $u \in H_0^1(\Omega)$  si et seulement si  $\alpha = 0$ , i.e.  $u$  est la fonction constante nulle sur  $\Omega$ .

On a donc en général  $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$ .

PROPOSITION 4.1.2

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , alors

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

sont des normes équivalentes sur  $H_0^1(\Omega)$ .

**THÉORÈME 4.1.2 (THÉORÈME DES TRACES)**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  avec  $\partial\Omega$  régulier.

Alors il existe un opérateur linéaire borné  $T : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  tel que

- $\forall u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega) : Tu = u|_{\partial\Omega}$
- $\forall u \in H^1(\Omega) : \|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$

où  $C$  ne dépend que de  $\Omega$ .

On dit que  $Tu$  est la trace de  $u$  sur  $\partial\Omega$  et on note  $Tu = u|_{\partial\Omega}$ .

Sous les hypothèses du théorème des traces on a :

- $u \in H_0^1(\Omega)$  si et seulement si  $Tu = 0$  sur  $\partial\Omega$ ;
- pour tout  $u, v$  de  $H^1(\Omega) : \int_{\Omega} u_{x_i} v \, dx = \int_{\partial\Omega} u v n_i \, dS - \int_{\Omega} u v_{x_i} \, dx$ .

## 4.2 Formulation faible d'un problème elliptique linéaire

Dans la suite  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et  $\partial\Omega$  est régulier.

On considère le problème

$$\begin{cases} Lu = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

où l'opérateur différentiel linéaire  $L$  est défini par

$$Lu = - \sum_{1 \leq i, j \leq d} \left( a_{ij}(x) u_{x_i} \right)_{x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) u_{x_i} + c(x) u ,$$

avec  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$  et en supposant que les  $a_{ij}, b_i, c$  sont dans  $L^\infty(\Omega)$  et  $f \in L^2(\Omega)$ .

On suppose de plus que  $L$  est elliptique au sens suivant :

$$\exists \nu > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d : \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2 \quad p.p. \Omega .$$

Soit  $u$  une solution forte de (4.1) et  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ , alors  $\int_{\Omega} (Lu)v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$ ,

par intégration par parties on obtient

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) u_{x_i} v + c(x) uv \right) dx = \int_{\Omega} f v \, dx .$$

Cette dernière relation a un sens même si l'on remplace  $u$  et  $v$  par des fonctions de  $H_0^1(\Omega)$ , d'où la définition :

## DÉFINITION 4.2.1

On dit que  $u \in H_0^1(\Omega)$  est une solution faible de (4.1) si

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx ,$$

où  $a(., .)$  est la forme bilinéaire associée à l'opérateur elliptique  $L$  et définie pour tout  $u, v$  de  $H_0^1(\Omega)$  par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) u_{x_i} v + c(x) uv \right) dx \quad . \quad (4.2)$$

On va présenter maintenant des résultats abstraits d'analyse fonctionnelle qui vont s'appliquer notre problème.

## THÉORÈME 4.2.1 (THÉORÈME DE LAX-MILGRAM)

Dans un espace de HILBERT réel  $H$ , dont la norme est noté  $\|\cdot\|$ , on considère une forme bilinéaire  $a(., .)$  vérifiant

- (i)  $\exists \alpha > 0, \forall u, v \in H : |a(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|$
- (ii)  $\exists \nu > 0, \forall u \in H : \nu \|u\|^2 \leq a(u, u)$ .

Alors pour toute forme linéaire continue,  $l \in H'$ , il existe un unique  $u \in H$  vérifiant

$$\forall v \in H : a(u, v) = l(v) \quad . \quad (V)$$

On dit que (V) est un problème variationnel.

## THÉORÈME 4.2.2

Sous les hypothèses du théorème de LAX-MILGRAM et en supposant que la forme bilinéaire  $a(., .)$  est symétrique on montre que la solution  $u \in H$  de (V) est l'unique minimum de la fonctionnelle

$$J[v] = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) ,$$

c'est-à-dire  $J[u] = \min_{v \in H} J[v]$ .

**Application :**

Le produit scalaire sur  $H_0^1(\Omega)$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ , vérifie les conditions (i) et (ii) du théorème de LAX-MILGRAM et est symétrique.

De plus  $l(v) = \int_{\Omega} f v \, dx$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$ .

Il existe donc un unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  vérifiant :  $\forall v \in H_0^1(\Omega) : a(u, v) = l(v)$ .

On a montré l'existence et l'unicité d'une solution faible de l'équation de POISSON avec conditions de DIRICHLET homogène,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $f \in L^2(\Omega)$  est donnée.

De plus cette solution est le minimum de  $J[v] = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - fv \right) dx$

cf. principe de DIRICHLET.

**Remarque :** Si  $a(.,.)$  est symétrique on n'a pas besoin du théorème de LAX-MILGRAM, le théorème de représentation de RIESZ s'applique directement.

#### PROPOSITION 4.2.1

Soit  $a(.,.)$  la forme bilinéaire associée à l'opérateur elliptique  $L$  et définie par (4.2), on a :

- 1)  $\exists \alpha > 0, \forall u, v \in H_0^1(\Omega) : |a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$
- 2)  $\exists \beta > 0, \exists \gamma \geq 0, \forall u \in H_0^1(\Omega) : \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u) + \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$

Cette proposition montre que pour  $L$  on a immédiatement la condition (i) du théorème de LAX-MILGRAM, par contre la condition (ii) n'est pas vérifiée en général.

On a le théorème :

#### THÉORÈME 4.2.3

Il existe  $\gamma \geq 0$  tel que pour tout  $\mu \geq \gamma$  et pour tout  $f \in L^2(\Omega)$ , il existe une solution faible unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  du problème

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

### 4.3 Éléments finis rectangulaires

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\bar{\Omega}$  est une union finie de polygones.

Soit  $\mathcal{T}_h$  un ensemble fini de polygones  $K$ , d'intérieurs non vide et tels que

- $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$
- Si  $K_1 \neq K_2 : \text{int}(K_1) \cap \text{int}(K_2) = \emptyset$   
et  $K_1 \cap K_2$  est vide ou réduit à un sommet commun  
ou c'est un côté commun à  $K_1$  et  $K_2$ .

On dit alors que  $\mathcal{T}_h$  est une triangulation de  $\bar{\Omega}$  et  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$ .

On note  $\Sigma_h$  l'ensemble des sommets des polygones de  $\mathcal{T}_h$ .

Pour simplifier on suppose que tous les polygones de la triangulation  $\mathcal{T}_h$  sont des rectangles.

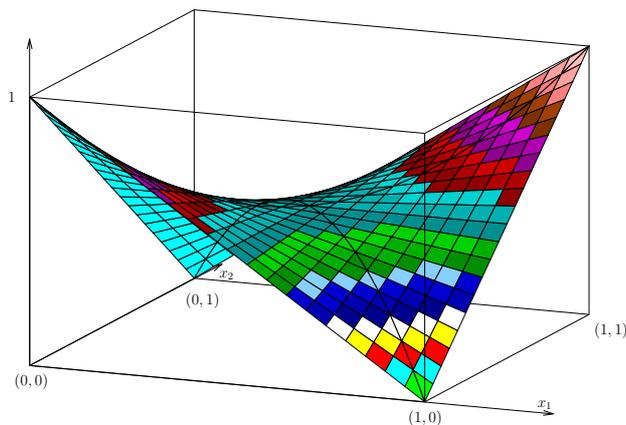
On note  $Q_1 = \{ P(x_1, x_2) = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2 / a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$ ,

l'ensemble des polynômes sur  $\mathbb{R}^2$  de degré inférieur à un par rapport à chaque variable.

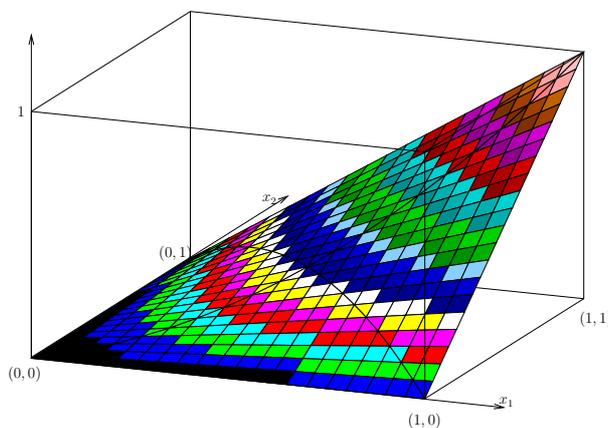
C'est un espace vectoriel de dimension 4, en particulier la valeur de  $P \in Q_1$  aux quatre sommets d'un rectangle  $K$  détermine entièrement  $P$  sur  $K$ .

**Exemples :** On prend  $K = [0, 1]^2$ . Écrire l'équation des polynômes suivants :

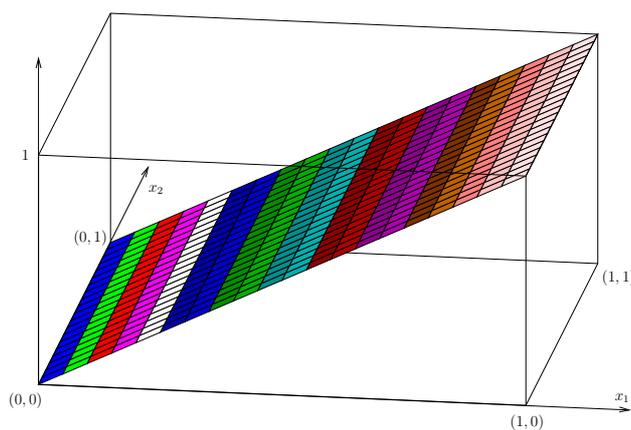
1. soit  $P_1 \in Q_1$  tel que  $P(0, 0) = P(1, 1) = 1$  et  $P(0, 1) = P(1, 0) = 0$  ;



2. soit  $P_2 \in Q_1$  tel que  $P(0, 0) = P(0, 1) = P(1, 0) = 0$  et  $P(1, 1) = 1$  ;



3. soit  $P_3 \in Q_1$  tel que  $P(0, 0) = P(0, 1) = 0$  et  $P(1, 0) = P(1, 1) = 1$ .



PROPOSITION 4.3.1

L'espace d'approximation

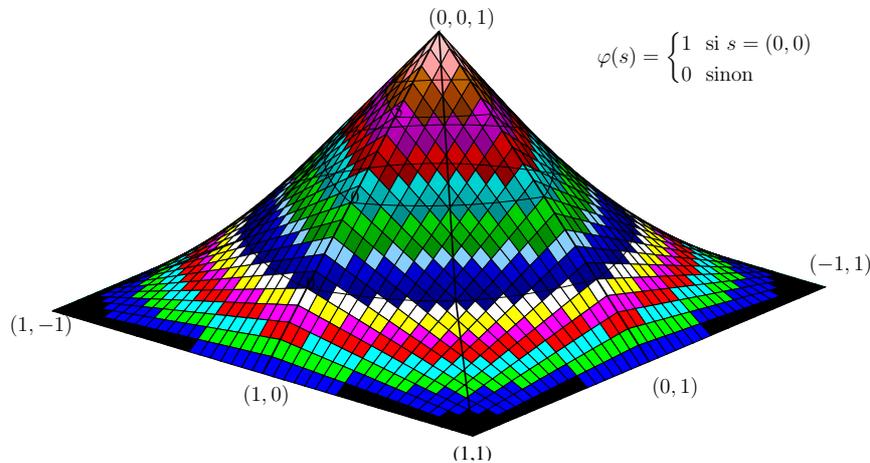
$$V_h = \left\{ v \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = 0 \text{ et pour tout } K \in \mathcal{T}_h : v|_K \in Q_1 \right\} .$$

est un sous espace vectoriel de  $H_0^1(\Omega)$ , de dimension finie  $\text{card}(\Sigma_h \cap \Omega)$ .

En effet, pour  $i \in \{1, 2\}$  la dérivée au sens des distributions de  $v$  par rapport à  $x_i$  est la fonction  $v_i \in L^2(\Omega)$ , définie sur  $\overline{\Omega}$  par  $v_i = (v|_K)_{x_i}$  pour tout  $K \in \mathcal{T}_h$ .

Soit  $\Sigma_h \cap \Omega = \{s_1, \dots, s_N\}$ , l'ensemble des sommets intérieurs à  $\Omega$ , on introduit les fonctions  $\varphi_i \in V_h$  telles que  $\varphi_i(s_j) = \delta_{ij}$ . On montre que  $\{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq N}$  est une base de  $V_h$ .

Pour tout  $v \in V_h$  : 
$$v = \sum_{i=1}^N v(s_i) \varphi_i .$$



En utilisant le théorème de LAX-MILGRAM on obtient la

PROPOSITION 4.3.2

Soit  $V_h$  un sous espace vectoriel de dimension finie d'un espace de HILBERT réel  $H$ , soit  $a(.,.)$  une forme bilinéaire définie sur  $H$  vérifiant les conditions (i) et (ii) du théorème de LAX-MILGRAM et soit  $l \in H'$ .

Alors il existe  $u \in H$  et  $u_h \in V_h$  solutions uniques des problèmes

- $\forall v \in H : a(u, v) = l(v)$
- $\forall v_h \in V_h : a(u_h, v_h) = l(v_h)$

et telles que

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\alpha}{\nu} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| .$$

Cette proposition s'applique immédiatement au cas où  $H = H_0^1(\Omega)$  et pour  $V_h$  défini dans la proposition 4.3.1. Dans ce cas on obtient en plus la

PROPOSITION 4.3.3

Soit  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on définit la projection,  $\Pi_h \phi$ , de  $\phi$  sur  $V_h$  par :  $\forall s_i \in \Sigma_h \cap \Omega, \Pi_h \phi(s_i) = \phi(s_i)$ . Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\phi - \Pi_h \phi\|_{H_0^1(\Omega)} = 0 .$$

### Application

Pour  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $\partial\Omega$  régulier on considère de nouveau l'équation de POISSON

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec  $f \in L^2(\Omega)$  donné.

Comme  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$  il existe  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  tel que  $\|u - \phi\|_{H_0^1(\Omega)} < \varepsilon/2$  pour  $\varepsilon > 0$  quelconque.

De plus  $\Pi_h \phi \in V_h$  et, pour  $h$  suffisamment petit,  $\|\phi - \Pi_h \phi\|_{H_0^1(\Omega)} < \varepsilon/2$ .

Donc  $\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u - \Pi_h \phi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u - \phi\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\phi - \Pi_h \phi\|_{H_0^1(\Omega)} < \varepsilon$ ,

c'est-à-dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Calcul de  $u_h$  :

$u_h \in V_h$  donc  $u_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i$  avec  $u_h(s_i) = U_i$ , de plus

$$\begin{aligned} \forall v_h \in V_h : \quad & a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx \\ \iff \forall j = 1, \dots, N : \quad & a(u_h, \varphi_j) = \int_{\Omega} f \varphi_j \, dx = F_j \\ \iff \forall j = 1, \dots, N : \quad & \sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) U_i = F_j \end{aligned}$$

Si on note  $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq N}$ ,  $F = (F_1 \ \dots \ F_N)^t$  et  $U = (U_1 \ \dots \ U_N)^t$  on est amené à résoudre un système linéaire de taille  $N$  :

$$AU = F.$$

Note : plus  $h$  est petit, plus l'approximation de  $u$  est bonne mais le nombre de sommets augmente et donc aussi la taille du système linéaire.

Algorithmme

- 1) Construction de la triangulation du domaine  $\bar{\Omega}$ .
- 2) Évaluation des  $\varphi_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ).
- 3) Calcul de  $F_j$  ( $1 \leq j \leq N$ ) par des méthodes de quadrature en dimension  $d = 2$ .
- 4) Calcul de

$$A_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2.$$

Or si  $s_i$  et  $s_j$  ne sont pas sommets d'un même  $K$  alors  $\text{supp}(\varphi_i) \cap \text{supp}(\varphi_j) = \emptyset$ , la matrice  $A$  est *creuse*.

On peut ordonner les sommets de façon à obtenir une *matrice bande*.

- 5) Déterminer  $U$  en résolvant  $AU = F$  en utilisant des méthodes de résolution numériques (directes ou itératives).
- 6) Pour augmenter la précision raffiner  $\mathcal{T}_h$  (*i.e.* diminuer  $h$ ) et recommencer en 1.

# Chapitre 5

## Schémas aux différences finies

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier la méthode des différences finies pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles d'évolution linéaires d'ordre 1 en  $t$ . Le représentant le plus simple qui nous servira d'exemple type pour illustrer les définitions et techniques proposées, est l'équation hyperbolique d'ordre un en  $t$  : l'équation de transport.

L'inconnue est une fonction  $u$  définie pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Le domaine de définition de  $u$  est discrétisé par la grille  $G_{h,k} = \{(x_m, t_n) / x_m = mh, m \in \mathbb{Z}, t_n = nk, n \in \mathbb{N}\}$  avec  $h$  et  $k$  des réels strictement positifs que l'on choisira petits.

On dit que  $h$  est le *pas de discrétisation spatiale* et  $k$  le *pas de temps*.

La fonction  $u$  qui est définie pour les variables continues  $(x, t)$ , prend la valeur  $u_m^n = u(mh, nk)$  au point  $(x_m, t_n) = (mh, nk)$  de la grille  $G_{h,k}$ .

Pour bien distinguer la *solution continue*  $u$  du résultat du schéma numérique, on va noter  $v$  la *solution numérique* qui est définie uniquement sur  $G_{h,k} : (v_m^n)_{m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}}$ .

Donc  $v_m^n$  est la solution approchée, au point  $(x_m, t_n)$ , de l'équation aux dérivées partielles.

Pour obtenir un problème discret on remplace les dérivées partielles par des *différences finies*, ainsi :

- $\frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) \simeq \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}$ , différence finie progressive ;
- $\frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) \simeq \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}$ , différence finie rétrograde ;
- $\frac{\partial u}{\partial x}(x_m, t_n) \simeq \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h}$ , différence finie centrée ;
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) \simeq \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$ , différence finie centrée d'ordre deux .

Ces approximations sont obtenus grâce à la formule de TAYLOR. On fait de même pour les dérivées partielles par rapport à  $t$  :

- $\frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_n) \simeq \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k}$ , différence finie progressive en  $t$  .

**Exemple :**

Considérons l'équation de transport  $u_t + cu_x = 0$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , avec la condition initiale  $u(x, 0) = \Phi(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et on suppose que  $c > 0$ .

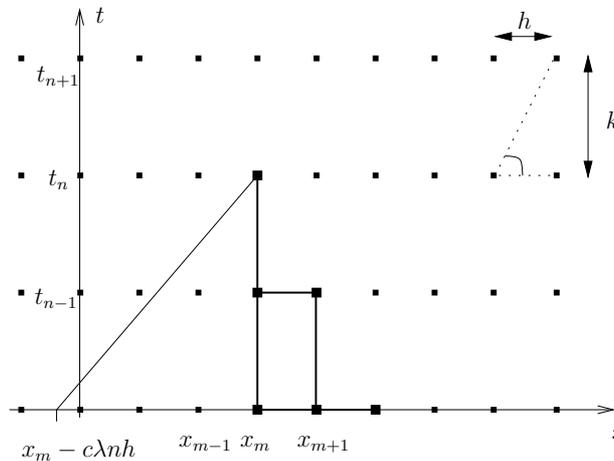
On va discrétiser cette équation aux dérivées partielles en utilisant un schéma progressif en espace et en temps :

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + c \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0. \quad (5.1)$$

En posant  $\lambda = k/h$  on obtient :  $v_m^{n+1} = (1 + \lambda c)v_m^n - \lambda c v_{m+1}^n = (1 + \lambda c - \lambda c \mathcal{T}_{-h})v_m^n$ , où  $\mathcal{T}_\alpha$  est l'opérateur de translation spatiale défini par  $\mathcal{T}_\alpha u(x, t) = u(x - \alpha, t)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , i.e.  $\mathcal{T}_{-h}v_m^n = v_{m+1}^n$ . On a par récurrence :

$$\begin{aligned} v_m^n &= (1 + \lambda c - \lambda c \mathcal{T}_{-h})^n v_m^0 \\ &= \sum_{p=0}^n C_n^p (1 + \lambda c)^{n-p} (-\lambda c \mathcal{T}_{-h})^p \Phi(x_m) \\ &= \sum_{p=0}^n C_n^p (1 + \lambda c)^{n-p} (-\lambda c)^p \Phi(x_m + ph). \end{aligned}$$

Ainsi le domaine de dépendance de  $v$  au point  $(x_m, t_n) = (ih, nk)$  est formé par les points  $x_m, x_m + h, x_m + 2h, \dots, x_m + nh$ . Or, on sait que  $u(x, t) = \Phi(x - ct)$  et que le domaine de dépendance de  $u_m^n = u(x_m, t_n)$  est restreint au point  $x_m - c\lambda nh$ . Le schéma discret ne tient donc pas compte des propriétés de la solution de l'équation aux dérivées partielles et la solution discrète  $v_m^n$  est en général différente de  $u_m^n$  : le schéma (5.1) ne peut pas être convergent.



Supposons de plus que  $\Phi$  est obtenu de façon expérimentale et que l'on mesure par exemple  $\tilde{\Phi}(x_m + ph) = \Phi(x_m + ph) + (-1)^p \varepsilon$ , i.e. on commet une erreur de  $\varepsilon$  sur  $|\Phi|$ .

Dans ce cas, l'erreur sur  $v_m^n$  est de l'ordre de  $(1 + 2\lambda c)^n \varepsilon$  et, pour  $\lambda$  fixé, l'erreur sur  $v_m^n$  croît de façon exponentielle avec le nombre d'itérations  $n$ . On dit que le schéma (5.1) est *instable*.

On constate sur cet exemple que, bien qu'il semble facile de remplacer les dérivées partielles par des différences finies, il faut toujours garantir que la solution donnée par un schéma aux différences finies converge, en un sens à définir, vers une solution de l'équation aux dérivées partielles.

**Remarques :**

1. Dans notre discussion du schéma discret (5.1) on n'a pas tenu compte d'éventuelles conditions au bord, pour un schéma discret celles-ci peuvent être de deux types. Supposons que l'on considère l'équation de transport sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$  uniquement. Pour pouvoir résoudre l'équation aux dérivées partielles on se donne une condition en  $x = 0$  de la forme  $u(0, t) = \Psi(t)$  pour  $t \geq 0$ , ceci entraîne pour le schéma discret que  $v_0^n = \Psi(t_n)$  ( $n \geq 0$ ). De plus, étant donnée la mémoire limitée d'un ordinateur, on est obligé de se restreindre à une grille spatiale finie  $\{x_0, x_1, \dots, x_M\}$ . En  $x_M$  on introduit alors des contraintes de la forme  $v_M^{n+1} = v_{M-1}^{n+1}$  ou  $v_M^{n+1} = v_{M-1}^n, \dots$ . Ces *conditions au bord numériques* sont nécessaires pour pouvoir déterminer  $v_m^{n+1}$  pour  $0 \leq m \leq M$ . Dans ce qui suit nous n'insisterons pas sur les problèmes posés par ces contraintes.
2. Les schémas aux différences finies permettent de traiter facilement des problèmes en une, deux ou trois dimensions spatiales pour des domaines à géométrie simple et avec des propriétés (p.ex. densité, vitesse, ...) qui varient lentement dans le domaine de définition. Dès que la géométrie devient complexe ou que les propriétés changent rapidement, on préférera la méthode des éléments finis. En effet, la méthode des éléments finis permet de traiter des géométries complexes (e.g. bords internes) et la triangulation peut être localement raffinée pour traiter des variations rapides de la solution. Par contre, il est en général plus compliqué d'écrire un code pour les éléments finis que pour les schémas aux différences finies.

## 5.2 Convergence, consistance et stabilité

### 5.2.1 Définitions

Dans toute la suite  $L$  est un opérateur différentiel linéaire qui est d'ordre un en  $t$  et on suppose que le problème

$$\begin{cases} Lu(x, t) = f(x, t) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = \Phi(x) & \text{pour } x \in \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.2)$$

est bien posé (voir page 3).

En remplaçant les dérivées partielles par des différences finies on obtient un opérateur discret  $L_{h,k}$ . Ainsi l'équation aux dérivées partielles homogène discrétisée s'écrit sous la forme  $L_{h,k}v = 0$ . Pour tenir compte du second membre on utilise un opérateur discret  $I_{h,k}$  que l'on applique à  $f$ .

Un schéma aux différences finies général, associé à l'équation aux dérivées partielles (5.2), s'écrit donc comme suit :

$$L_{h,k}v = I_{h,k}f .$$

Dans la suite on choisira  $I_{h,k}$  toujours de façon à avoir  $I_{h,k}f = f_m^n$ , de plus la condition initiale sera simplement donnée par  $v_m^0 = \Phi(x_m)$ , pour  $x_m \in \Omega$ .

Une première classification des schémas discrets est donné par la définition suivante.

## DÉFINITION 5.2.1

- Un schéma aux différences finies est explicite si on peut écrire  $v_m^{n+1}$  comme combinaison linéaire finie des  $v_i^j$  pour  $j \leq n$ .  
Le schéma est dit implicite si d'autres valeurs de  $v$  sont nécessaires (p.ex.  $v_{m\pm 1}^{n+1}$ ).
- Un schéma aux différences finies est à un pas de temps s'il utilise les valeurs de  $v$  à deux instants seulement, par exemple en  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .  
Le schéma est à pas multiples si la valeur de  $v$  à plus de deux instants intervient.

Un schéma à un pas construit  $(v_m^n)_m$ , pour tout  $n \geq 1$ , à partir des conditions initiales  $v_m^0 = \Phi(x_m)$ . Pour initialiser un schéma à  $J$  pas, les  $v_m^0$  ne sont pas suffisants, il faut fournir  $(v_m^j)_m$  pour  $J$  instants.

Dans la section précédente on a montré qu'il faut s'assurer que la solution discrète obtenue par un schéma aux différences finies donne une représentation correcte de la solution de l'équation aux dérivées partielles, d'où la

## DÉFINITION 5.2.2 (CONVERGENCE)

Soit  $u(x, t)$  la solution de (5.2) et  $v$  une solution du schéma discret  $L_{h,k}v = f_m^n$  telle que  $v_m^0$  converge vers  $\Phi(x)$  quand  $x_m$  converge vers  $x$ .  
On dit que le schéma aux différences finies  $L_{h,k}$  est un schéma convergent si  $v_m^n$  converge vers  $u(x, t)$  quand  $(x_m, t_n)$  converge vers  $(x, t)$  pour  $(h, k)$  tendant vers  $(0, 0)$ .

La convergence exprime que la solution d'un schéma aux différences finies converge vers la solution de l'équation aux dérivées partielles. Avant de lancer des calculs, il faut s'assurer que le schéma utilisé est convergent, or ceci est en général difficile à démontrer. On va proposer dans la suite des critères plus facile à vérifier.

**Remarques :**

1. La définition ci-dessus et celles qui suivent, ne concernent que les schémas à un pas de temps. Pour des méthodes à pas multiples il faudra tenir compte de l'étape d'initialisation.
2. La définition précise de la convergence de  $v_m^n$  vers  $u$ , cohérente avec la suite, entraîne l'utilisation d'un opérateur d'interpolation : pour  $n$  fixé, on associe à  $(v_m^n)_m \in l^2(h\mathbb{Z})$  un élément de  $L^2(\mathbb{R})$ . On impose ensuite une convergence dans  $L^2(\mathbb{R})$  de l'interpolée vers la solution  $u$ .

## DÉFINITION 5.2.3 (CONSISTANCE)

On dit que le schéma  $L_{h,k}v = f_m^n$  est consistant avec l'équation aux dérivées partielles  $Lu = f$  si pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  on a, en tout point  $(x_m, t_n)$  :

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (L\varphi - L_{h,k}\varphi) = 0.$$

La consistance entraîne en particulier qu'une solution régulière de l'équation aux dérivées partielles est une solution du schéma aux différences finies quand les pas de discrétisation tendent vers 0. C'est une condition nécessaire de convergence mais ce n'est pas une condition suffisante.

En effet, considérons de nouveau le schéma (5.1) et soit  $\varphi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

$$\text{On a } L\varphi = \varphi_t + c\varphi_x \text{ et } L_{h,k}\varphi = \frac{\varphi_m^{n+1} - \varphi_m^n}{k} + c \frac{\varphi_{m+1}^n - \varphi_m^n}{h}.$$

Grâce à la formule de TAYLOR :

$$\begin{aligned}\varphi_{m+1}^n &= \varphi(x_m + h, t_n) = \varphi_m^n + h\varphi_x(x_m, t_n) + \frac{h^2}{2}\varphi_{xx}(x_m, t_n) + O(h^3), \\ \varphi_m^{n+1} &= \varphi(x_m, t_n + k) = \varphi_m^n + k\varphi_t(x_m, t_n) + \frac{k^2}{2}\varphi_{tt}(x_m, t_n) + O(k^3).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$L_{h,k}\varphi(x_m, t_n) = \varphi_t(x_m, t_n) + c\varphi_x(x_m, t_n) + \frac{1}{2}(k\varphi_{tt}(x_m, t_n) + ch\varphi_{xx}(x_m, t_n)) + O(h^2) + O(k^2)$$

et donc

$$(L\varphi - L_{h,k}\varphi)(x_m, t_n) = -\frac{1}{2}(k\varphi_{tt}(x_m, t_n) + ch\varphi_{xx}(x_m, t_n)) + O(h^2) + O(k^2) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0.$$

Le schéma (5.1) est donc consistant bien que non convergent.

On avait constaté que ce schéma est en un certain sens instable. Nous allons donner une définition précise de stabilité pour une équation aux dérivées partielles homogène d'ordre un en  $t$  dans la

#### DÉFINITION 5.2.4 (STABILITÉ)

Le schéma aux différences finies  $L_{h,k}v = 0$ , associé à l'équation aux dérivées partielles  $Lu = 0$ , est stable s'il existe  $\Lambda \subset (\mathbb{R}_+^*)^2$ , avec  $(0, 0) \in \bar{\Lambda}$ , tel que pour tout  $T > 0$  il existe une constante  $C_T$  tel que

$$h \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |v_m^n|^2 \leq C_T h \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |v_m^0|^2,$$

pour tous  $0 \leq t_n \leq T$  et  $(h, k) \in \Lambda$ .

On dit que  $\Lambda$  est la région de stabilité du schéma.

Un exemple fréquent pour  $\Lambda$  est le segment  $\{(h, \lambda h) / 0 < h < C\}$ , avec  $C$  et  $\lambda$  des constantes positives; le cône  $\{(h, k) / 0 < C_1 h \leq k \leq C_2 h < C_3\}$ , avec  $C_1, C_2$  et  $C_3$  des constantes positives est un autre exemple.

**Remarque :** En utilisant le principe de DUHAMEL (voir p. 42) on montre qu'un schéma  $L_{h,k}v = f_m^n$  est stable si le schéma homogène  $L_{h,k}v = 0$  est stable. De plus on peut étendre la définition au cas d'équations d'ordre 2 en  $t$  et au cas de schémas à pas multiples.

La définition de stabilité utilise une norme sur l'espace  $l^2(h\mathbb{Z})$  (voir section 5.3) :

$$(v_m^n)_{m \in \mathbb{Z}} \text{ est un élément de } l^2(h\mathbb{Z}) \text{ si } \|v^n\|_{l^2(h\mathbb{Z})} = \left( h \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |v_m^n|^2 \right)^{1/2} \text{ est fini.}$$

Le critère de stabilité s'écrit alors, pour  $h$  et  $k$  suffisamment petits dans  $\Lambda$  :

$$(\forall T > 0)(\exists C_T)(\forall t_n \in [0, T]) : \quad \|v^n\|_{l^2(h\mathbb{Z})} \leq C_T \|v^0\|_{l^2(h\mathbb{Z})}. \quad (\text{S})$$

La stabilité garantit qu'à chaque instant  $t_n \in [0, T]$ , la norme de la solution discrète est bornée, à un facteur constant près, par la norme des données initiales.

Cette *stabilité numérique* n'est pas à confondre avec la stabilité du problème bien posé (5.2). Cette dernière concerne le comportement à l'infini de la solution en fonction des

conditions initiales, par contre la stabilité numérique d'un schéma concerne le comportement de  $v$  sur l'intervalle  $[0, T]$  quand  $(h, k)$  tend vers  $(0, 0)$ .

**Remarques :**

1. Il existe d'autres façons de définir la stabilité numérique, on a choisi la définition particulière ci-dessus parce qu'elle s'applique à un grand nombre de schémas linéaires et qu'elle est adaptée à l'analyse de stabilité de VON NEUMANN.
2. Pour des équations aux dérivées partielles et schémas discrets non linéaires on utilisera d'autres espaces, *e.g.*  $L^1$ , et d'autres propriétés, *e.g.* la diminution de la variation totale ou la monotonie d'un schéma, afin d'éviter des oscillations de  $v$  là où la solution de l'équation aux dérivées partielles varie rapidement, *e.g.* discontinuités.

L'importance des notions de consistance et stabilité est due au

**THÉORÈME 5.2.1 (ÉQUIVALENCE DE LAX-RICHTMYER)**

*Un schéma linéaire, consistant avec le problème (5.2), est convergent si et seulement si il est stable.*

La dernière définition que l'on va introduire permet de distinguer les schémas convergents, en effet deux schémas convergents n'ont pas nécessairement les mêmes performances pour l'approximation de la solution continue.

**DÉFINITION 5.2.5**

*Un schéma  $L_{h,k}v = f_m^n$ , consistant avec le problème (5.2), est d'ordre  $p$  en espace et  $q$  en temps si, pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  :*

$$E_{h,k}\varphi = L_{h,k}\varphi - L\varphi = O(h^p) + O(k^q).$$

*On dit que le schéma est d'ordre  $(p, q)$  et  $E_{h,k}$  est l'erreur de troncature du schéma.*

**Remarques :**

1. L'erreur de troncature permet d'évaluer l'erreur introduite lorsque l'on remplace l'opérateur continu  $L$  par l'opérateur discret  $L_{h,k}$ .
2. La consistance d'un schéma nécessite uniquement que  $L_{h,k}\varphi - L\varphi = o(1)$ .

**Exemple :**

Sans démontrer le théorème de LAX-RICHTMYER nous allons illustrer, grâce à un exemple, comment la stabilité et la consistance interviennent dans la convergence d'un schéma discret.

Pour  $c < 0$ , considérons l'équation d'advection  $u_t + cu_x = 0$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , avec  $u(x, 0) = \Phi(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . On suppose de plus que  $\Phi''$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

On va utiliser le schéma (5.1) :  $v_m^{n+1} = (1 + \lambda c)v_m^n - \lambda cv_{m+1}^n$ , où  $\lambda = k/h$ .

Pour  $x = mh$ , posons  $e(x, t_n) = u(x, t_n) - v_m^n$ , c'est l'erreur commise par le schéma au point  $(x, t_n)$ .

Alors  $L_{h,k}e = L_{h,k}u = E_{h,k}u$ , car  $v$  est solution de  $L_{h,k}v = 0$  et  $u$  est solution de  $Lu = 0$ , d'où

$$e(x, t_{n+1}) = (1 + \lambda c)e(x, t_n) - \lambda ce(x + h, t_n) + k E_{h,k}u(x, t_n)$$

et

$$\sup_x |e(x, t_{n+1})| \leq (|1 + \lambda c| + |\lambda c|) \sup_x |e(x, t_n)| + k \sup_x |E_{h,k}u(x, t_n)|.$$

On a ainsi majoré l'erreur à l'instant  $t_{n+1}$  grâce à l'erreur à l'instant  $t_n$  et de l'erreur de troncature en  $t_n$  ; par récurrence

$$\sup_x |e(x, t_n)| \leq (|1 + \lambda c| + |\lambda c|)^n \sup_x |e(x, 0)| + k \sum_{p=1}^n (|1 + \lambda c| + |\lambda c|)^{p-1} \sup_x |E_{h,k}u(x, t_{n-p})|.$$

Or comme l'on verra plus loin, l'analyse de VON NEUMANN permet de montrer que le schéma est stable si et seulement si  $\lambda$  est tel que  $-1 \leq \lambda c \leq 0$ , *i.e.*  $|1 + \lambda c| + |\lambda c| = 1$ . Comme de plus  $e(x, 0) = 0$  pour tout  $x$ , on a

$$\sup_x |e(x, t_n)| \leq k \sum_{i=0}^{n-1} \sup_x |E_{h,k}u(x, t_i)|.$$

On doit maintenant évaluer l'erreur de troncature. Or le schéma (5.1) est consistant et d'ordre  $(1, 1)$ , de plus  $E_{h,k}u(x, t_n) = L_{h,k}u(x, t_n) = (L_{h,k}u - Lu)(x, t_n) = O(k)$  car  $k = \lambda h$ . On obtient ainsi une estimation de l'erreur de troncature qui dépend de  $u_{xx}$ ,  $u_{tt}$  et  $k$ , pour obtenir une estimation globale et montrer la convergence du schéma on va utiliser l'hypothèse sur  $\Phi$ . On a

$$|E_{h,k}u(x, t_i)| = |L_{h,k}\Phi(x - ct_i)| = \left| \frac{h}{2}c \Phi''(\zeta_1) + \frac{k}{2}c^2 \Phi''(\zeta_2) \right| \leq k C \sup_{\zeta} |\Phi''(\zeta)|$$

et finalement, pour tout  $n \leq T/k$  :

$$\|e(\cdot, t_n)\|_{\infty} = \sup_x |e(x, t_n)| \leq k n k C_{(\lambda, \Phi'', c)} \leq T C_{(\lambda, \Phi'', c)} k = C_{(\lambda, \Phi'', c, T)} k.$$

L'erreur commise en chaque point de la grille est d'ordre  $k$  et le schéma est convergent.

**Remarque :** Dans cet exemple nous avons montré une convergence en chaque point de la grille en utilisant la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  sur  $h\mathbb{Z}$  et des hypothèses fortes sur  $u(x, 0)$ .

Nous allons appliquer l'équivalence de LAX-RICHTMYER uniquement dans le cadre  $L^2$ , en effet on a alors, grâce à la méthode de VON NEUMANN, une méthode générale pour l'étude de la stabilité pour des schémas numériques associés à des équations aux dérivées partielles d'évolution linéaires à coefficients constants.

On montre par ailleurs que la régularité des données initiales a une influence sur la précision de la solution numérique.

### 5.2.2 Condition de Courant-Friedrichs-Lewy

Nous allons étudier différents schémas discrets pour le problème de transport avec la vitesse  $c \in \mathbb{R}^*$  :

$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = \Phi(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.4)$$

• Le schéma progressif en temps et en espace (5.1) est de la forme :  $v_m^{n+1} = \alpha v_m^n + \beta v_{m+1}^n$  et on a

$$\|v^{n+1}\|_{l^2(h\mathbb{Z})}^2 = h \sum_{m \in \mathbb{Z}} |v_m^{n+1}|^2 = h \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\alpha v_m^n + \beta v_{m+1}^n|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \|v^n\|_{l^2(h\mathbb{Z})}^2.$$

Une condition nécessaire de stabilité de ces schémas est donc  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ .

En particulier pour le schéma (5.1) on a  $|1+c\lambda|+|c\lambda| \leq 1$ , ce schéma est donc stable pour  $-1 \leq c\lambda \leq 0$ . On va montrer plus loin que ceci est une condition suffisante de stabilité.

• Le schéma de LAX-FRIEDRICHS est centré en espace et progressif en temps mais utilise une moyenne centrée pour approximer  $v_m^n$  :

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n)}{k} + c \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0. \quad (5.5)$$

C'est un schéma consistant et qui est de la forme  $v_m^{n+1} = \alpha v_{m+1}^n + \beta v_{m-1}^n$ .

On montre que ces schémas sont stables si  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ , en particulier le schéma de LAX-FRIEDRICHS (5.5) est stable si  $|c\lambda| \leq 1$ .

Les résultats précédents se généralisent et on a le

### THÉORÈME 5.2.2

Soit  $v_m^{n+1} = \alpha v_{m-1}^n + \beta v_m^n + \gamma v_{m+1}^n$  un schéma explicite pour l'équation aux dérivées partielles (5.4). Alors, si le rapport  $k/h = \lambda$  est constant, une condition nécessaire de stabilité du schéma est la condition de COURANT-FRIEDRICHS-LEWY (CFL) :

$$|c\lambda| \leq 1.$$

### THÉORÈME 5.2.3

Il n'existe pas de schéma explicite, consistant et inconditionnellement stable pour l'équation aux dérivées partielles (5.4).

### Remarque :

1. Les théorèmes précédents s'appliquent de façon plus générale aux systèmes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques, définis à la page 45.
2. La vitesse d'advection  $c$  détermine la pente des droites caractéristiques de (5.4), la condition (CFL) assure que le *domaine de dépendance discret* contient le *domaine de dépendance de l'équation aux dérivées partielles*, voir la figure page 68.

**Exemple :** Pour montrer que le dernier théorème ne s'applique pas aux schémas implicites considérons le schéma suivant, progressif en temps et rétrograde en espace, à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + c \frac{v_m^{n+1} - v_{m-1}^{n+1}}{h} = 0.$$

En écrivant ce schéma sous la forme :  $(1+c\lambda)v_m^{n+1} = v_m^n + c\lambda v_{m-1}^{n+1}$

on montre que si  $c > 0$ , on a pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  :

$$\|v^{n+1}\|_{l^2(h\mathbb{Z})}^2 \leq \|v^n\|_{l^2(h\mathbb{Z})}^2.$$

Le schéma est *inconditionnellement stable* pour  $c > 0$ .

## 5.3 Analyse de stabilité de von Neumann

L'*analyse de stabilité de VON NEUMANN* utilise l'analyse de FOURIER pour étudier le comportement d'un schéma discret. Avant de montrer des applications à l'étude de schémas discrets, nous allons motiver l'utilisation de l'analyse de FOURIER grâce à une analogie et nous allons rappeler quelques résultats sur  $l^2(h\mathbb{Z})$ .

**Motivations :**

Si on considère que  $v^n$  est un signal numérique discret monodimensionnel on peut interpréter  $v^{n+1}$  comme la sortie d'un système discret  $\mathcal{S} : v^{n+1} = \mathcal{S}[v^n]$ .

Pour étudier le système  $\mathcal{S}$  on introduit la transformée de FOURIER des signaux discrets  $v^n$  et  $v^{n+1}$ .

Ceci est particulièrement intéressant quand  $\mathcal{S}$  est un système linéaire et invariant, un *filtre*, dans ce cas la sortie de  $\mathcal{S}$  est obtenue grâce à la convolution de l'entrée du système avec la réponse impulsionnelle  $s$  de  $\mathcal{S} : \mathcal{S}[e] = s \star e$ . Un filtre peut aussi être représenté par une équation aux différences finies, récursive ou non.

Dans le domaine fréquentiel la convolution devient une multiplication de la transformée de FOURIER du signal en entrée avec la réponse fréquentielle  $\widehat{s}$  de  $\mathcal{S}$ . Le signal sinusoïdal discret  $e_\omega = (e^{i\omega m})_{m \in \mathbb{Z}}$  est un vecteur propre de  $\mathcal{S} : \mathcal{S}[e_\omega] = \sqrt{2\pi} \widehat{s}(\omega) e_\omega$ .

**L'espace  $l^2(h\mathbb{Z})$  :**

Nous rappelons ici brièvement quelques éléments de la structure de l'espace de HILBERT  $l^2(h\mathbb{Z})$ . Les définitions et résultats présentés s'obtiennent à partir de l'étude des séries de FOURIER des fonctions de  $L^2([-\pi, +\pi])$  : grâce à un changement de variable, on tient compte du pas de discrétisation spatiale  $h > 0$ .

Ainsi pour  $v \in l^2(h\mathbb{Z})$  on définit la norme :  $\|v\|_{l^2(h\mathbb{Z})} = \left( h \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |v_m|^2 \right)^{1/2}$

et le produit scalaire sous-jacent, pour tout  $v, w \in l^2(h\mathbb{Z})$  :

$$(v, w)_{l^2(h\mathbb{Z})} = h \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m w_m .$$

Soit  $v \in l^2(h\mathbb{Z})$ , on définit sa transformée de FOURIER, pour  $\xi \in [-\pi/h, +\pi/h]$ , par :

$$\widehat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h v_m e^{-imh\xi} .$$

La fonction  $\widehat{v}$  est  $2\pi/h$ -périodique, c'est un élément de  $L^2([-\pi/h, +\pi/h])$  et l'identité ci-dessus est à prendre au sens de la convergence en moyenne quadratique.

La formule de reconstruction s'écrit pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  :

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} \widehat{v}(\xi) e^{+imh\xi} d\xi ,$$

et on a l'identité de PARSEVAL :

$$\|\widehat{v}\|_{L^2([-\pi/h, \pi/h])}^2 = \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h |v_m|^2 = \|v\|_{l^2(h\mathbb{Z})}^2 .$$

Pour  $v \in l^2(h\mathbb{Z})$  on a :  $\widehat{\mathcal{T}_{\pm h} v}(\xi) = e^{\mp ih\xi} \widehat{v}(\xi)$ , où  $\mathcal{T}_{\pm h} v_m^n = v_{m \mp 1}^n$  ;  
une variation spatiale (translation) de  $v$  se traduit par un déphasage de  $\widehat{v}$ .

Grâce à la formule de PARSEVAL on obtient une forme équivalente pour le critère de stabilité (S) :

$$(\forall T > 0)(\exists C_T)(\forall t_n \in [0, T]) : \quad \|\widehat{v}^n\|_{L^2([-\pi/h, \pi/h])} \leq C_T \|\widehat{v}^0\|_{L^2([-\pi/h, \pi/h])}. \quad (\text{S}')$$

### Méthode de VON NEUMANN :

Considérons un schéma discret à un pas  $L_{h,k}v = 0$ , linéaire et à coefficients constants. En appliquant la transformée de FOURIER et en réarrangeant les termes on obtient la relation :

$$\widehat{v^{n+1}}(\xi) = g(\xi, h, k) \widehat{v^n}(\xi).$$

Le facteur  $g(\xi, h, k)$  est appelé facteur d'amplification : le module de  $g$ ,  $|g|$ , est l'amplification et la phase de  $g$ ,  $\arg(g)$ , est le déphasage que subit chaque fréquence de la solution discrète quand on avance d'un pas de temps  $k$ . Par itération on a :

$$\widehat{v^n}(\xi) = g(\xi, h, k)^n \widehat{v^0}(\xi).$$

### Remarques :

1. Pour déterminer le facteur d'amplification en pratique, on remplace dans le schéma discret les termes  $v_m^n$  par  $g^n e^{imh\xi}$ , i.e. on cherche des solutions de la forme  $g^n e^{imh\xi}$ .
2. Si  $u$  vérifie (5.4) et, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R})$ , on a, en appliquant la transformée de FOURIER par rapport à  $x$  (voir aussi la section 2.3.2) :

$$\widehat{u}_t(\omega, t) = -c i \omega \widehat{u}(\omega, t), \text{ donc } \widehat{u}(\omega, t) = \widehat{u}(\omega, 0) e^{-ict\omega} = \widehat{\Phi}(\omega) e^{-ict\omega} \text{ et}$$

$$\widehat{u}(\omega, t+k) = e^{-ick\omega} \widehat{u}(\omega, t).$$

Le facteur d'amplification,  $g = |g| e^{i \arg(g)}$ , du schéma, doit approximer  $e^{-ick\omega}$  : Si  $|g| \neq 1$  on a une erreur d'amplitude dans la solution discrète, en particulier si  $|g(\xi, h, k)| < 1$ , on atténue la fréquence  $\xi$  et on parle de *dissipation*, resp. *viscosité numérique* ; la différence de phase,  $\arg(g) - ck\xi$ , introduit une erreur de phase, appelée *dispersion numérique*.

### Exemples :

1. Considérons l'équation de transport  $u_t + c u_x = 0$ , pour  $c > 0$ , discrétisée grâce au schéma progressif en temps et en espace (5.1).

On a  $g(\xi, h, k) = 1 + c\lambda - c\lambda e^{ih\xi}$  qui, pour  $\lambda$  fixé, ne dépend que de  $h\xi$ , et

$$|g(h\xi)|^2 = g(h\xi) \overline{g(h\xi)} = 1 + 4c\lambda(1 + c\lambda) \sin^2(h\xi/2).$$

$$\text{Or } |\widehat{v^n}(\xi)| = |g(h\xi)|^n |\widehat{v^0}(\xi)|,$$

et  $|g(h\xi)| = 1$  seulement si  $h\xi = 0$  ; sinon  $|g(h\xi)| > 1$ , on va en déduire que le schéma est instable.

Soit  $(h_0, k_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , et  $K \in \mathbb{R}_+^*$  :

alors il existe  $(h, k) \in ]0, h_0[ \times ]0, k_0[$  et  $(\xi_1, \xi_2) \in ]0, \pi/h[$  avec

$$|g(h\xi)| \geq 1 + Kk, \text{ pour tout } \xi \in [\xi_1, \xi_2].$$

On construit  $v^0$  tel que  $\widehat{v}^0(\xi) = \begin{cases} (\xi_2 - \xi_1)^{-1/2} & \text{si } \xi \in [\xi_1, \xi_2] \\ 0 & \text{si } \xi \notin [\xi_1, \xi_2] \end{cases}$  et  $\|v^0\|_{l^2(h\mathbb{Z})} = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \|v^n\|_{l^2(h\mathbb{Z})}^2 &= \|\widehat{v}^n\|_{L^2([- \pi/h, \pi/h])}^2 \\ &= \int_{-\pi/h}^{+\pi/h} |g(h\xi)|^{2n} |\widehat{v}^0(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} |g(h\xi)|^{2n} \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} d\xi \\ &\geq (1 + Kk)^{2n} \geq \frac{1}{2} e^{2KT} \|v^0\|_{l^2(h\mathbb{Z})}^2, \end{aligned}$$

pour  $n \simeq T/k$  et  $k_0$  suffisamment petit.

Comme  $K$  peut être pris aussi grand que l'on veut, le critère de stabilité (S) n'est pas vérifié et le schéma (5.1) est instable, donc divergent, pour  $c > 0$ .

2. Considérons l'équation aux dérivées partielles  $u_t + c u_x - u = 0$ .

Ce problème d'advection-réaction est discrétisé grâce à (5.5) :

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n)}{k} + c \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} - v_m^n = 0.$$

Le facteur d'amplification est  $g(\xi, h, k) = \cos(h\xi) + i c \lambda \sin(h\xi) + k$ , et  $|g|^2 = (\cos(h\xi) + k)^2 + c^2 \lambda^2 \sin^2(h\xi)$ .

On montre que  $|g(\xi, h, k)| \leq 1 + k$  pour  $|c|\lambda \leq 1$ , or pour  $n \leq T/k$  :

$$\begin{aligned} \|v^n\|_{l^2(h\mathbb{Z})}^2 &= \|\widehat{v}^n\|_{L^2([- \pi/h, \pi/h])}^2 \\ &= |g(\xi, h, k)|^{2n} \|\widehat{v}^0\|_{L^2([- \pi/h, \pi/h])}^2 \\ &\leq (1 + k)^{2n} \|v^0\|_{l^2(h\mathbb{Z})}^2 \\ &\leq (1 + k)^{2T/k} \|v^0\|_{l^2(h\mathbb{Z})}^2 \leq e^{2T} \|v^0\|_{l^2(h\mathbb{Z})}^2. \end{aligned}$$

D'après le critère (S) on a la stabilité du schéma.

La solution de l'équation aux dérivées partielles s'écrit  $u(x, t) = \Phi(x - ct) e^t$ , ainsi même si la condition initiale  $\Phi$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , la solution  $u$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . En appliquant la transformée de FOURIER en espace, on a  $\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{\Phi}(\omega) e^{ict\omega} e^t$  et donc  $\widehat{u}(\omega, t + k) = \widehat{u}(\omega, t) e^{ick\omega} e^k$ .

Afin de pouvoir suivre l'évolution de la solution  $u(x, t)$  au cours du temps, il faut que  $|g|$  soit plus grand que 1.

De façon générale on a le

### THÉORÈME 5.3.1

Un schéma à un pas  $L_{h,k}v = 0$ , linéaire et à coefficients constants, est stable si et seulement si il existe une constante  $K \in \mathbb{R}_+$  et  $\Lambda \subset (\mathbb{R}_+^*)^2$ , avec  $(0,0) \in \overline{\Lambda}$ , tel que

$$|g(\xi, h, k)| \leq 1 + Kk,$$

pour tout  $(h, k) \in \Lambda$ .

Si le facteur d'amplification ne dépend que de  $h\xi$  la condition nécessaire et suffisante de stabilité s'écrit :

$$|g(h\xi)| \leq 1.$$

### Exemple de STRIKWERDA :

On considère l'équation aux dérivées partielles  $u_t + c u_{xxx} = f$ ,

où l'on discrétise  $u_t$  comme dans le schéma de LAX-FRIEDRICHS (5.5) et  $u_{xxx}$  grâce aux différences centrées, pour obtenir :

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n)}{k} + c \frac{v_{m+2}^n - 2v_{m+1}^n + 2v_{m-1}^n - v_{m-2}^n}{2h^3} = f_m^n.$$

Soit  $\varphi$  une fonction régulière, alors  $L\varphi = \varphi_t + c\varphi_{xxx}$  et

$$L_{h,k}\varphi = \frac{\varphi_m^{n+1} - \frac{1}{2}(\varphi_{m+1}^n + \varphi_{m-1}^n)}{k} + c \frac{\varphi_{m+2}^n - 2\varphi_{m+1}^n + 2\varphi_{m-1}^n - \varphi_{m-2}^n}{2h^3}.$$

En utilisant la formule de TAYLOR en  $(x_m, t_n)$  :

$$\begin{aligned} \varphi_m^{n+1} &= \varphi_m^n + k\varphi_t + \frac{k^2}{2}\varphi_{tt} + O(k^3), \\ \varphi_{m\pm 1}^n &= \varphi_m^n \pm h\varphi_x + \frac{h^2}{2}\varphi_{xx} \pm \frac{h^3}{6}\varphi_{xxx} + \frac{h^4}{4!}\varphi_{xxxx} + O(h^5), \\ \varphi_{m\pm 2}^n &= \varphi_m^n \pm 2h\varphi_x + 2h^2\varphi_{xx} \pm \frac{4h^3}{3}\varphi_{xxx} + \frac{2h^4}{3}\varphi_{xxxx} + O(h^5). \end{aligned}$$

Donc

$$L_{h,k}\varphi = \varphi_t + \frac{k}{2}\varphi_{tt} - \frac{h^2}{k}\varphi_{xx} + O(k^2 + h^4/k) + c\varphi_{xxx} + O(h^2)$$

et

$$L_{h,k}\varphi - L\varphi = \frac{k}{2}\varphi_{tt} - \frac{h^2}{k}\varphi_{xx} + O(k^2 + h^4/k + h^2).$$

Le schéma est donc consistant seulement si  $h^2/k$  tend vers 0 quand  $h, k \rightarrow 0$ .

Supposons que  $k = H(h)$ , avec  $H$  régulière et  $H(0) = 0$ , dans ce cas  $L_{h,k}\varphi - L\varphi = O(h)$  et on dit que le schéma est d'ordre 1.

Pour étudier la stabilité on écrit le schéma sous la forme :

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n) - \frac{ck}{2h^3}(v_{m+2}^n - 2v_{m+1}^n + 2v_{m-1}^n - v_{m-2}^n),$$

on obtient le facteur d'amplification

$$g(\xi, h, k) = \cos(h\xi) + i4ckh^{-3} \sin(h\xi) \sin^2(h\xi/2).$$

On a  $|g(\xi, h, k)|^2 = \cos^2(h\xi) + 16c^2k^2h^{-6} \sin^2(h\xi) \sin^4(h\xi/2)$ ,

une condition nécessaire de stabilité est alors que la quantité  $h^{-3}k$  reste borné.

Or ceci est incompatible avec la contrainte de consistance sur  $h^2k^{-1}$ . Le schéma ne peut donc pas être consistant et stable en même temps.

## Schémas pour l'équation de transport.

Pour terminer on présente quelques schémas classiques pour la résolution du problème homogène (5.4) pour  $c \in \mathbb{R}^*$  :

- **Schéma centré en espace :**

Ce schéma s'écrit 
$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + c \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0 ;$$

il est consistant et d'ordre (2, 1). En écrivant

$$v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{c\lambda}{2} (v_{m+1}^n - v_{m-1}^n) ,$$

où  $\lambda = k/h$ , on montre que le facteur d'amplification  $g(h\xi) = 1 - ic\lambda \sin(h\xi)$  et  $|g|^2 = 1 + c^2\lambda^2 \sin^2(h\xi) \geq 1$  : on a un schéma instable.

- **Schéma «upwind» :**

On a vu que pour  $c > 0$  il faut utiliser une différence finie rétrograde pour garantir la stabilité et pour  $c < 0$  il faut utiliser une différence finie progressive. En intégrant le test sur le signe de  $c$ , on obtient un schéma qui utilise  $v_{m-1}^n$  ou  $v_{m+1}^n$ , suivant la direction d'advection, d'où le nom du schéma. On a

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + \left( \frac{c - |c|}{2} \right) \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} + \left( \frac{c + |c|}{2} \right) \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0 ;$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + c \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} - |c| \frac{h}{2} \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2} = 0 .$$

On obtient donc un schéma explicite centré en espace avec un terme correcteur provenant d'une discrétisation de  $(|c|h/2) u_{xx}$ .

Le schéma est consistant, d'ordre (1, 1) et  $g(h\xi) = 1 - 2|c|\lambda \sin^2(h\xi/2) - ic\lambda \sin(h\xi)$ .

On a  $|g(h\xi)|^2 = 1 - 4|c|\lambda(1 - |c|\lambda) \sin^2(h\xi) \leq 1$  si et seulement si  $|c|\lambda \leq 1$ .

On constate que le terme de *dissipation* ou *viscosité numérique*  $(|c|h/2) u_{xx}$  a rendu stable le schéma centré en espace, par contre on a perdu dans l'ordre du schéma.

- **Schéma de LAX-FRIEDRICHS :**

Ce schéma se présente sous la forme suivante

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n)}{k} + c \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0 .$$

Pour  $\varphi$  régulière on montre que

$$L_{h,k}\varphi - L\varphi = \frac{k}{2} \varphi_{tt} - \frac{h^2}{2k} \varphi_{xx} + O(k^2 + h^4/k) + \frac{ch^2}{6} \varphi_{xxx} + O(h^4) .$$

Le schéma est consistant si  $h^2/k \rightarrow 0$  pour  $h, k \rightarrow 0$ .

Si  $k = \lambda h$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  fixé, on a un schéma consistant d'ordre 1.

Le facteur d'amplification est  $g(h\xi) = \cos(h\xi) + i c \lambda \sin(h\xi)$  et  $|g|^2 = \cos^2(h\xi) + c^2 \lambda^2 \sin^2(h\xi) \leq 1$  si et seulement si  $|c|\lambda \leq 1$ .

On peut écrire ce schéma sous la forme

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + c \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} - \frac{1}{2} \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{k} = 0$$

et on constate que le schéma de LAX-FRIEDRICHS correspond à la discrétisation par différences finies centrées de l'équation aux dérivées partielles

$$u_t + c u_x - \frac{h^2}{2k} u_{xx} = 0.$$

On observe encore le phénomène de *viscosité numérique* qui rend le schéma stable.

• **Schéma de LAX-WENDROFF :**

Ce schéma est basé sur l'utilisation du développement de TAYLOR et de l'équation aux dérivées partielles à discrétiser. Si  $u$  est une solution régulière de l'équation aux dérivées partielles on a :

$$u_m^{n+1} = u_m^n + k \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(k^2),$$

or  $u_t = -c u_x$  et  $u_{tt} = (-c u_x)_t = -c u_{xt} = c^2 u_{xx}$ , d'où

$$u_m^{n+1} = u_m^n - ck \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(k^2).$$

En utilisant une discrétisation spatiale centrée pour approximer  $u_x$  et  $u_{xx}$ , on obtient le schéma discret :

$$v_m^{n+1} = v_m^n - ck \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} + c^2 \frac{k^2}{2} \frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}.$$

Ce schéma est consistant et d'ordre (2, 1) car

$$L_{h,k}\varphi - L\varphi = \frac{k}{2} \varphi_{tt} - \frac{c^2 k}{2} \varphi_{xx} + \frac{c^2 k h^2}{4!} \varphi_{xxxx} + O(h^3 + k^2).$$

En posant  $\lambda = k/h$  :

$$v_m^{n+1} = v_m^n - \frac{c\lambda}{2}(v_{m+1}^n - v_{m-1}^n) + \frac{c^2 \lambda^2}{2}(v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n),$$

on montre que le facteur d'amplification est  $g(h\xi) = 1 - 2c^2 \lambda^2 \sin^2(h\xi/2) - i c \lambda \sin(h\xi)$  et  $|g|^2 = 1 - 4c^2 \lambda^2 (1 - c^2 \lambda^2) \sin^4(h\xi/2)$ .

Ce schéma est donc stable pour la condition (CFL) :  $|c\lambda| \leq 1$ .

• Schéma «leapfrog» (saute-mouton) :

Comme son nom l'indique, ce schéma est centré en espace et en temps :

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} + c \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0$$

ou

$$v_m^{n+1} = v_m^{n-1} - c\lambda (v_{m+1}^n - v_{m-1}^n) .$$

Ce schéma est à deux pas, il faut donc donner les conditions initiales en  $v_m^0$  et  $v_m^1$ . En pratique on utilise un schéma à un pas pour initialiser un schéma à pas multiples.

Comme  $L_{h,k}\varphi - L\varphi = \frac{k^2}{6}\varphi_{ttt} - \frac{ch^2}{6}\varphi_{xxx} + O(h^2 + k^2)$ ,

le schéma est consistant et d'ordre (2, 2).

L'analyse de VON NEUMANN ne s'applique pas directement à ce schéma. En appliquant la transformé de FOURIER spatiale on a

$$\widehat{v^{n+1}}(\xi) + i2c\lambda \sin(h\xi) \widehat{v^n}(\xi) - \widehat{v^{n-1}}(\xi) = 0 . \quad (5.7)$$

Cette récurrence d'ordre deux s'exprime grâce à un système en introduisant une variable supplémentaire :

$$\begin{pmatrix} \widehat{v^{n+1}}(\xi) \\ \widehat{v^n}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i2c\lambda \sin(h\xi) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{v^n}(\xi) \\ \widehat{v^{n-1}}(\xi) \end{pmatrix}$$

Si on pose  $\widehat{V}^n = \begin{pmatrix} \widehat{v^n} \\ \widehat{v^{n-1}} \end{pmatrix}$  on a  $\widehat{V}^{n+1} = G(h\xi) \widehat{V}^n$ , où  $G$  est la *matrice d'amplification*.

Par récurrence  $\widehat{V}^{n+1} = G(h\xi)^n \widehat{V}^1$

et la condition de stabilité est donc de la forme  $\|G^n\| \leq C_T$ .

Si le rayon spectral  $\rho(G) = \max\{|g_i| / g_i \text{ valeur propre de } G\}$  est strictement plus petit que 1, alors on sait que  $G^n$  tend vers 0 et  $\|G^n\|$  est bornée.

Mais si l'on veut généraliser le cas scalaire, on sait qu'il faut permettre  $|g_i| \leq 1 + Kk$ . Or pour les systèmes ceci est une condition nécessaire de stabilité mais non suffisante, comme on le verra dans ce qui suit.

Nous allons étudier les valeurs propres de  $G$ . Remarquons d'abord que  $G$  est la *matrice compagne* de la relation de récurrence (5.7), son polynôme caractéristique correspond à l'équation en  $g$ , obtenue en remplaçant  $v_m^n$  par  $g^n e^{imh\xi}$  dans le schéma discret :

$$g^2 + i2c\lambda \sin(h\xi) g - 1 = 0 .$$

On a les racines  $g_{\pm}(h\xi) = -ic\lambda \sin(h\xi) \pm \sqrt{1 - c^2\lambda^2 \sin^2(h\xi)}$ .

Cas  $c\lambda < 1$  : on a deux racines complexes conjuguées  $g_+$  et  $g_-$  avec  $|g_{\pm}| = 1$ . La matrice d'amplification  $G(h\xi)$  est diagonalisable et la solution de (5.7) est

$$\widehat{v^n}(\xi) = \alpha(h\xi) g_+(h\xi)^n + \beta(h\xi) g_-(h\xi)^n ,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent des données initiales  $\widehat{v}^0$  et  $\widehat{v}^1$ . On montre que

$$\widehat{v^n} = \frac{-g_- \widehat{v}^0 + \widehat{v}^1}{g_+ - g_-} g_+ + \frac{g_+ \widehat{v}^0 - \widehat{v}^1}{g_+ - g_-} g_- = \frac{g_+ g_-^n - g_+^n g_-}{g_+ - g_-} \widehat{v}^0 + \frac{g_+^n - g_-^n}{g_+ - g_-} \widehat{v}^1 .$$

On en déduit que

$$|\widehat{v}^n|^2 \leq \frac{2}{1 - c^2 \lambda^2} \left( |\widehat{v}^0|^2 + |\widehat{v}^1|^2 \right)$$

et, en utilisant l'identité de PARSEVAL, on obtient finalement

$$\|v^n\|_{l^2(h\mathbb{Z})} \leq \sqrt{\frac{2}{1 - c^2 \lambda^2}} \left( \|v^0\|_{l^2(h\mathbb{Z})} + \|v^1\|_{l^2(h\mathbb{Z})} \right).$$

Le schéma est donc stable : à tout instant  $t_n \in [0, T]$ , la norme de  $v^n$  est bornée par celle des conditions initiales.

Cas  $|c\lambda| > 1$  : si  $h\xi = -\pi/2$  on a deux racines distinctes  $g_{\pm}(-\pi/2)$ .

Or  $|g_+(-\pi/2)|^2 = 1 + 2c^2\lambda^2 > 1$  : la matrice  $G(-\pi/2)$  est diagonalisable mais  $G^n(-\pi/2)$  n'est pas borné et le schéma n'est pas stable.

Cas  $|c\lambda| = 1$  : on a des racines doubles pour  $h\xi = \pm\pi/2$  et la solution de (5.7) s'écrit

$$\widehat{v}^n(\xi) = \alpha(h\xi) g_+(h\xi)^n + \beta(h\xi) n g_+(h\xi)^{n-1},$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent de  $\widehat{v}^0$  et  $\widehat{v}^1$ . On a

$$\widehat{v}^n(\xi) = g_+(h\xi)^n (1 - n) \widehat{v}^0(\xi) + n g_+(h\xi)^{n-1} \widehat{v}^1(\xi).$$

Or, pour  $h\xi = \pm\pi/2$ , on trouve  $g_+(h\xi) = \pm i$  et, si l'on suppose que  $\widehat{v}^1(\xi) = g_0(h\xi) \widehat{v}^0(\xi)$ , on a

$$\widehat{v}^n = (\pm i)^{n-1} (n g_0 \pm i(1 - n)) \widehat{v}^0.$$

Pour  $\xi = \pm\frac{\pi}{2h}$  on a donc  $|\widehat{v}^n(\xi)| \sim n C_{\pm} |\widehat{v}^0(\xi)|$  pour  $n$  grand, on peut donc construire des solutions pour lesquelles  $\|v^n\|_{l^2(h\mathbb{Z})}$  croît de façon linéaire avec  $n$ .

Dans ce cas la matrice d'amplification  $G(\pm\pi/2)$  a une valeur propre double de module 1 et elle peut se mettre sous forme de JORDAN mais le schéma est instable d'après la théorie. On peut remarquer que cette instabilité est très faible et rarement nuisible en pratique.

Finalement, le schéma leapfrog est stable si et seulement si  $|c\lambda| < 1$ .

Note : On remarque que les valeurs de  $v_m^{n+1}$  et  $v_{m+1}^{n+1}$  sont indépendantes, on pourra voir apparaître deux solutions indépendantes (en échiquier), ceci peut poser des problèmes en pratique même si  $|c\lambda| < 1$  (en particulier pour des problèmes non linéaires).

## 5.4 Équations paraboliques

Les définitions de convergence, consistance, stabilité et d'ordre d'un schéma s'appliquent aussi aux équations paraboliques. Notre équation type sera

$$u_t = d u_{xx}, \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}_+^*.$$

### • Schéma explicite centré en espace :

On a

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} - d \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} = 0,$$

$$\text{et } L_{h,k}\varphi - L\varphi = \frac{k}{2}\varphi_{tt} + O(k^2) - \frac{dh^2}{12}\varphi_{xxxx} + O(h^4),$$

le schéma est consistant et d'ordre  $(2, 1)$ . En posant  $\mu = k/h^2$  :

$$v_m^{n+1} = d\mu(v_{m-1}^n + v_{m+1}^n) + (1 - 2d\mu)v_m^n$$

et le facteur d'amplification  $g(h\xi) = 1 - 4d\mu \sin^2(h\xi/2)$ . Donc  $|g| \leq 1$  si et seulement si  $0 \leq 4d\mu \sin^2(h\xi/2) \leq 2$  pour tout  $\xi$ . La condition de stabilité est donc

$$d\mu \leq \frac{1}{2}.$$

On constate que la condition de stabilité entraîne que  $k/h \rightarrow 0$  quand  $h, k \rightarrow 0$ . Ceci exprime le fait que la solution discrète  $v$  doit avoir un domaine de dépendance proche de celui de la solution  $u$  de l'équation aux dérivées partielles qui est ici l'axe  $\{t = 0\}$ .

L'équation de la chaleur modélisant une diffusion il est intéressant d'avoir un schéma dissipatif, *i.e.*  $|g| < 1$  on choisira donc  $\mu < 1/(2d)$ .

Notons finalement que pour  $\mu \in ]0, \frac{1}{2d}[$  fixé et  $k = \mu h^2$  le schéma est d'ordre 2.

### • Schéma implicite centré en espace :

En écrivant un schéma rétrograde en temps et centré en espace on a :

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} - d \frac{v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}}{h^2} = 0,$$

ou,

$$(1 + 2d\mu)v_m^{n+1} - d\mu(v_{m-1}^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}) = v_m^n.$$

À chaque étape il faut résoudre un système tridiagonal pour obtenir  $v^{n+1}$  à partir de  $v^n$ . Ce schéma est consistant, d'ordre  $(2, 1)$  et *inconditionnellement stable* car

$$g(h\xi) = \frac{1}{1 + 4d\mu \sin^2(h\xi/2)}.$$

• **Schéma de CRANK-NICOLSON**

Ce schéma est basé sur les deux précédents, on évalue le terme de diffusion en faisant la moyenne de l'écriture explicite et implicite :

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} - \frac{d}{2} \left( \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} + \frac{v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}}{h^2} \right) = 0.$$

Ce schéma implicite est consistant, d'ordre (2, 2) et on a

$$d\mu v_{m-1}^{n+1} - 2(1 + d\mu)v_m^{n+1} + d\mu v_{m+1}^{n+1} = -d\mu v_{m-1}^n - 2(1 - d\mu)v_m^n - d\mu v_{m+1}^n.$$

Le facteur d'amplification est  $g(h\xi) = \frac{1 - 2d\mu \sin^2(h\xi/2)}{1 + 2d\mu \sin^2(h\xi/2)} = 1 - \frac{4d\mu \sin^2(h\xi/2)}{1 + 2d\mu \sin^2(h\xi/2)}$ ,

donc  $|g| \leq 1$  et le schéma est inconditionnellement stable.

• **Schéma de DU FORT-FRANKEL**

Le schéma leapfrog est instable pour tout  $\mu$ , or une modification de la discrétisation spatiale donne le schéma stable suivant

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n+1}}{2k} - d \frac{v_{m-1}^n - (v_m^{n+1} + v_m^{n-1}) + v_{m+1}^n}{h^2} = 0,$$

avec  $L_{h,k}\varphi - L\varphi = -dk^2h^{-2}\varphi_{tt} + O(h^2) + O(k^2)$ .

Ce schéma est donc consistant seulement si  $k/h \rightarrow 0$  quand  $h, k \rightarrow 0$ . En notant  $\mu = k/h^2$  on a

$$(1 + 2d\mu)v_m^{n+1} = 2d\mu(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n) + (1 - 2d\mu)v_m^{n-1}.$$

L'étude de la stabilité nous amène à considérer le polynôme caractéristique de la matrice d'amplification  $G$  :

$$(1 + 2d\mu)g^2 - 4d\mu \cos(h\xi)g - (1 - 2d\mu) = 0.$$

Dont les racines s'écrivent :  $g_{\pm}(h\xi) = \frac{2d\mu \cos(h\xi) \pm \sqrt{1 - 4d^2\mu^2 \sin^2(h\xi)}}{1 + 2d\mu}$ .

Si  $4d^2\mu^2 \sin^2(h\xi) < 1$ , on a deux racines réelles distinctes et

$$|g_{\pm}(h\xi)| \leq \frac{2d\mu |\cos(h\xi)| + \sqrt{1 - 4d^2\mu^2 \sin^2(h\xi)}}{1 + 2d\mu} < 1.$$

Si  $4d^2\mu^2 \sin^2(h\xi) > 1$ , on a deux racines complexes conjuguées et

$$|g_{\pm}(h\xi)|^2 = \frac{1}{(1 + 2d\mu)^2} ((2d\mu \cos(h\xi))^2 + 4d^2\mu^2 \sin^2(h\xi) - 1) = \frac{4d^2\mu^2 - 1}{(1 + 2d\mu)^2} < 1.$$

Si  $4d^2\mu^2 \sin^2(h\xi) = 1$ , on a une racine réelle double et  $|g_+(h\xi)| = \frac{2d\mu |\cos(h\xi)|}{1 + 2d\mu} < 1$ .

Dans tous les cas le rayon spectral est strictement plus petit que 1 et  $G(h\xi)^n$  tend vers zéro. On a donc un schéma explicite qui est inconditionnellement stable mais conditionnellement consistant.

## 5.5 Applications

### 5.5.1 Équation d'advection-diffusion-réaction

On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + r u(x, t), \quad \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \quad (5.8)$$

où  $c \in \mathbb{R}^*$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $d \in \mathbb{R}_+^*$  et  $u(x, 0) = \Phi(x)$ .

On va utiliser un schéma progressif en temps et centré en espace :

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + c \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = d \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h^2} + r v_m^n \quad (5.9)$$

Ce schéma est consistant et d'ordre  $(2, 1)$ , la condition de stabilité est  $d\mu \leq \frac{1}{2}$ .

Pour  $\mu \in ]0, \frac{1}{2d}[$  fixé et  $k = \mu h^2$  on a un schéma d'ordre 2.

En notant  $\alpha = \frac{ch}{2d}$ , le schéma (5.9) s'écrit aussi

$$v_m^{n+1} = (1 - 2d\mu + rk)v_m^n + d\mu(1 - \alpha)v_{m+1}^n + d\mu(1 + \alpha)v_{m-1}^n.$$

Pour  $\mu \in ]0, \frac{1}{2d}[$  fixé,  $\alpha \leq 1$  et  $1 - 2d\mu + r\mu h^2 \geq 0$ , on a

$$|v_m^{n+1}| \leq (1 - 2d\mu + rk)|v_m^n| + d\mu(1 - \alpha)|v_{m+1}^n| + d\mu(1 + \alpha)|v_{m-1}^n| \leq (1 + r^+k) \sup_m |v_m^n|,$$

où  $r^+ = \max(0, r)$ . Par récurrence on obtient le *principe du maximum discret* suivant :

$$\forall t_n \in [0, T] : \sup_m |v_m^n| \leq (1 + kr^+)^n \sup_m |v_m^0| \leq e^{Tr^+} \sup_m |v_m^0|.$$

Pour obtenir ce résultat, on a imposé des contraintes sur la discrétisation spatiale  $h$  :

$$h \leq \frac{2d}{c} \quad \text{et, si } r < 0, k = \mu h^2 \leq \frac{2d\mu - 1}{r}.$$

Si ces inégalités ne sont pas vérifiées, la solution discrète n'a pas le même comportement que la solution de l'équation aux dérivées partielles parabolique (5.8) et on pourra observer des oscillations dans la solution. Par contre, si pour satisfaire ces contraintes il faut prendre  $h$  trop petit, il se peut que le schéma devient inefficace.

**Remarque :** En modélisation d'un flux de chaleur, la quantité  $Pe = c/d [1/m]$  est appelée *nombre de PECLLET*, en mécanique des fluides  $Re = c/d$  est le *nombre de REYNOLDS*. Ce nombre contrôle l'intensité relative de l'advection par rapport à la diffusion : si  $Pe$  est grand, c'est l'advection qui domine, si  $Pe$  est petit c'est la diffusion. On peut interpréter  $c/d$  comme étant le rapport du temps de diffusion,  $t_{diff} = x^2/d$ , et du temps d'advection,  $t_{adv} = x/c$ .

Ci-dessous on propose un code `Scilab`<sup>1</sup> pour implémenter le schéma (5.9). Noter que l'on s'est intéressé principalement aux calculs et non pas à l'utilisation du code (p.ex. entrée interactive des paramètres).

<sup>1</sup>© INRIA, logiciel disponible à <http://www-rocq.inria.fr/scilab/>

```

1 // Paramètres de l'edp
2 c=0.30;
3 d=0.10;
4 r=0.13;
5
6 // Paramètres du schéma
7 k=0.1; // pas de temps
8 T=10; // instant final
9 N=ceil(T/k)+1; // nb. de points dans [0,T]
10 t=linspace(0,T,N); // intervalle discret de temps
11
12 h=0.2; // pas de discrétisation spatiale
13 xg=-5; xd=10; // limites spatiales
14 M=ceil((xd-xg)./h)+1; // nb. de points dans [xg,xd]
15 x=linspace(xg,xd,M); // intervalle discret d'espace
16
17 v=zeros(N,M); // v(n,:) solution à l'instant n
18
19 // Afficher les paramètres du schéma
20 mu=k/h^2;
21 alpha=c.*h./(2.*d);
22 mprintf('c=%f\td=%f\tr=%f\n',c,d,r)
23 mprintf('h=%f\tk=%f\nmu=%f\alpha=%f\n',h,k,mu,alpha)
24 mprintf('mu*d=%f\td/Pe=%f\tr',mu.*d,(2.*d)./c)
25 if (r<0) then
26     mprintf('(2d*mu-1)/r=%f\n',(2.*d.*mu-1)./r)
27 else
28     mprintf('\n')
29 end
30
31 // Condition initiale phi() définie sur [xg0,xd0]
32 xg0=-2;xd0=2;
33 Ind_xg0_xd0=bool2s((xg0 <= x)&(x <= xd0)); // indicatrice de [xg0,xd0]
34 deff(' [y]=phi(z)', 'y=sin(%pi *z/2)');
35 v(1,:)=Ind_xg0_xd0 .* phi(x); // définition de la c.i.
36
37 // Itérations sur le vecteur v(n,:)
38 c1=1-2.*d.*mu+r.*k; c2=d.*mu.*(1-alpha); c3=d.*mu.*(1+alpha);
39 for n=2:N
40     v(n,:)=c1*v(n-1,:) + c2*[v(n-1,2:M) 0] + c3*[0 v(n-1,1:M-1)];
41 end
42
43 // Afficher la solution v dans [xg,xd]x[0,T]x[min(v),max(v)]
44 plot3d1(x,t,v',-111,86,"x@t@u",[2 2 4])

```

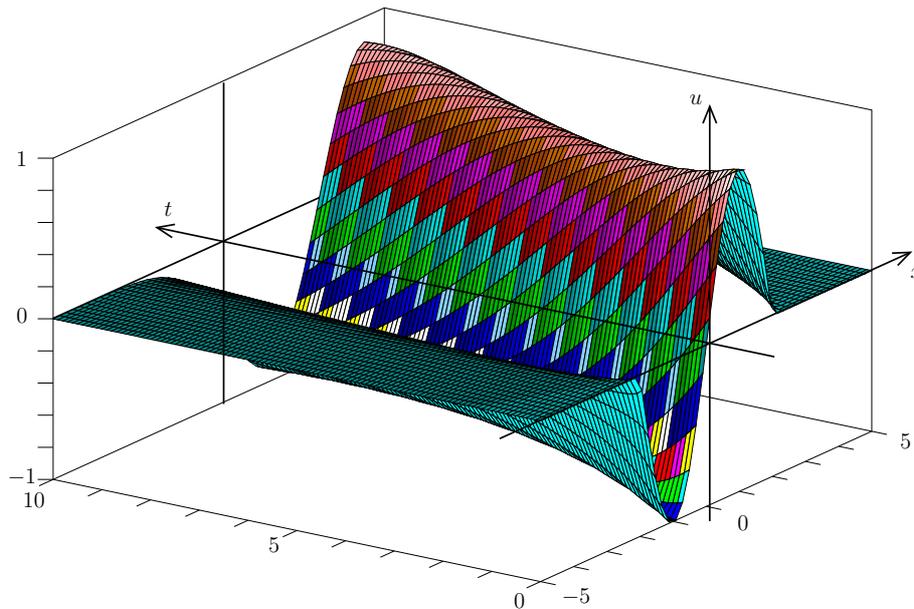
On obtient l'affichage des paramètres :

```

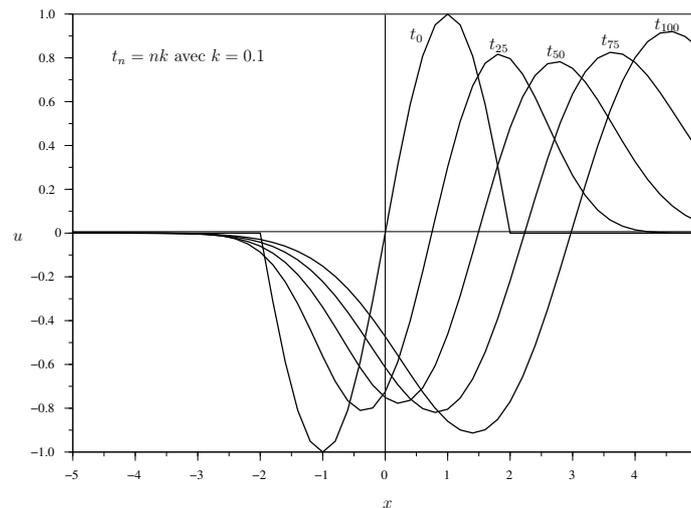
c=0.300000      d=0.100000      r=0.130000
h=0.200000      k=0.100000
mu=2.500000     alpha=0.300000
mu*d=0.250000   2/Pe=0.666667

```

et, après calculs, la figure suivante (on s'est restreint à  $x \in [-5, +5]$ ) :



On constate le transport et la diffusion, à laquelle s'oppose la réaction, de la concentration initiale  $\Phi$ . Souvent on trace la solutions dans le plan  $xu$  à des instants  $t_n$  différents :



Finalement, on s'intéresse à la précision de  $v$ , solution de (5.9) sur la grille discrète, par rapport à  $u$ , solution de (5.8) sur  $\mathbb{R} \times [0, T]$ . On a à l'instant  $t_{100} = 10$ , avec  $h = 0,2$  :

$$err_{\infty}(t_{100}) = \sup_{x_m \in [-5,10]} |u(x_m, 10) - v_m^{100}| = 0,0497294$$

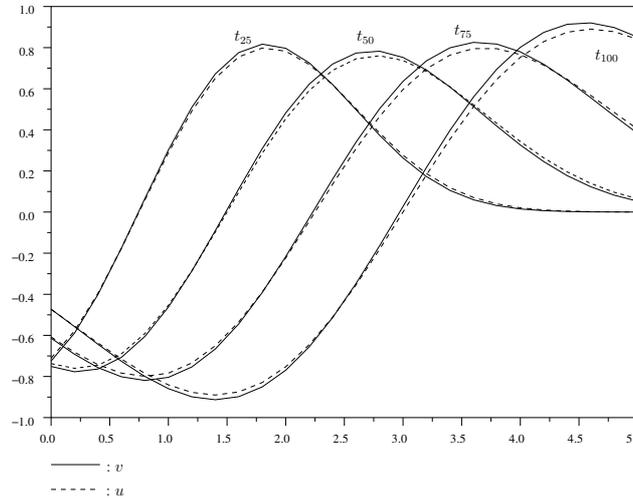
et

$$err_2(t_{100}) = \left( h \sum_{x_m \in [-5,10]} (u(x_m, 10) - v_m^{100})^2 \right)^{1/2} = 0,0722882.$$

Sur la figure suivante on a représenté la solution continue  $u$  et la solution discrète  $v$ , on constate des différences de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-2}$ , cf.  $err_{\infty}$ . L'erreur relative,  $|u - v|/|v|$ , peut atteindre 2.6 aux points où  $u \sim 0$ .

Pour conclure on peut dire que le schéma reproduit assez bien le comportement de la solution de l'équation aux dérivées partielles, par contre la discrétisation grossière et des phénomènes de bord perturbent rapidement le résultat numérique et rendent le résultat quantitativement inutilisable.

Pour améliorer le résultat il faut diminuer  $h$  (donc  $k$ ) et augmenter le domaine spatial discret, on augmente la mémoire et le temps de calcul nécessaires.



### 5.5.2 Équation de la chaleur

On se propose de résoudre numériquement l'équation de la chaleur dans un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = d \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) & \text{pour } (x, y, t) \in ]0, a[^2 \times ]0, T] \\ u(x, y, 0) = \Phi(x, y) & \text{pour } (x, y) \in ]0, a[^2 \\ u(x, y, t) = 0 & \text{pour } (x, y, t) \in \partial(]0, a[^2) \times [0, T], \end{cases}$$

où  $d \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $T > 0$  et la condition initiale  $\Phi$  est donnée.

Comme dans le cas des fonctions à une dimension spatiale, on utilise la formule de TAYLOR pour approximer les dérivées partielles de  $u$ . Les valeurs de  $v$  sur la grille discrète sont notées  $v_{m,p}^n$ , où  $n \in \mathbb{N}$  et  $m, p \in \mathbb{Z}$ . Pour simplifier on suppose que  $(x_m, y_p) = (mh, ph)$ , c'est-à-dire que l'on a une grille spatiale carrée.

Le schéma de CRANK-NICOLSON s'écrit

$$\frac{v_{m,p}^{n+1} - v_{m,p}^n}{k} = \frac{d}{2} \left( \frac{v_{m+1,p}^n - 2v_{m,p}^n + v_{m-1,p}^n}{h^2} + \frac{v_{m,p+1}^n - 2v_{m,p}^n + v_{m,p-1}^n}{h^2} + \frac{v_{m+1,p}^{n+1} - 2v_{m,p}^{n+1} + v_{m-1,p}^{n+1}}{h^2} + \frac{v_{m,p+1}^{n+1} - 2v_{m,p}^{n+1} + v_{m,p-1}^{n+1}}{h^2} \right)$$

et, en posant  $\mu = k/h^2$ , on a :

$$\begin{aligned} 2(1 + 2d\mu) v_{m,p}^{n+1} - d\mu (v_{m+1,p}^{n+1} + v_{m-1,p}^{n+1} + v_{m,p+1}^{n+1} + v_{m,p-1}^{n+1}) \\ = 2(1 - 2d\mu) v_{m,p}^n + d\mu (v_{m+1,p}^n + v_{m-1,p}^n + v_{m,p+1}^n + v_{m,p-1}^n). \end{aligned}$$



La matrice  $A$  est tridiagonale par blocs, chacun des  $M^2$  blocs est carré d'ordre  $M$  et  $A$  est une matrice ( $M^2 \times M^2$ ).

Pour chaque pas de temps  $t_n$  il faut résoudre (5.11), c'est-à-dire un système d'ordre  $M^2$ . On montre que la matrice  $A$  est définie positive et admet une décomposition de CHOLESKY :  $A = L L^t$ , où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure. Cette décomposition simplifie la résolution du système (5.11). Afin d'économiser de la place mémoire, on utilise de plus une représentation adaptée à la matrice  $A$  qui est une matrice *creuse* (angl. *sparse*).

On propose le code Scilab suivant :

```

1 // Paramètres du problème
2 d=0.5; // coefficient de diffusion
3 a=%pi; // domaine spatial ]0,a[x]0,a[
4 T=1; // domaine temporel [0,T]
5
6 // Augmenter la mémoire de Scilab
7 stacksize(5000000);
8
9 // Paramètres du schéma
10 h=0.05; // pas de discrétisation spatiale
11 MM=ceil(a./h)+1; // nb. de points dans [0,a]
12 M=MM-2; // nb. de points dans ]0,a[
13 xx=linspace(0,a,MM); // intervalle discret d'espace de 0 à a
14 x=xx(1,2:MM-1); // intervalle discret d'espace sans 0 et a
15
16 k=0.01; // pas de temps
17 N=ceil(T/k)+1; // nb. de points dans [0,T]
18 t=linspace(0,T,N); // intervalle discret de temps
19
20 mu=k./h^2;
21 M2=M^2; // taille du système linéaire
22 v=zeros(MM,MM,N); // solution dans [0,a]^2x[0,T]
23
24 mprintf('d=%f\ta=%f\tT=%f\n',d,a,T)
25 mprintf('h=%f\tk=%f\n',h,k)
26 mprintf('mu=%f\tlambda=%f\n',mu,k/h)
27 mprintf('N=%i\tM=%i\tM^2=%i\n',N,M,M2)
28
29 // Condition initiale à évaluer sur les points intérieurs
30 deff(' [z]=phi(x,y)', 'z=sin(x).*sin(y)');
31 v(2:MM-1,2:MM-1,1)=eval3d(phi,x,x);
32
33 // Construction des matrices A et B
34 // noter que l'on n'utilise que des matrices creuses
35 D1=sparse([1:M2-1;2:M2]',ones(M2-1,1),[M2 M2])..
36 -sparse([M:M:M2-M;1+M:M:M2-M+1]',ones(M-1,1),[M2 M2]);
37 DM=sparse([1:M2-M;1+M:M2]',ones(M2-M,1),[M2 M2]);
38
39 A=-(d*mu).*(D1+DM); // triangle sup. de A
40 A=A+A'; // A est symétrique
41 B=-A;
42 A=A+2.*(1+2*d*mu).*speye(M2,M2); // on ajoute la diagonale
43 B=B+2.*(1-2*d*mu).*speye(M2,M2);

```

```

44 clear D1,DM;
45 mprintf('Stacksize=%i, used=%i\n',stacksize())
46 // Factorisation de A par la méthode de CHOLESKY
47 spchoA=chfact(A);
48 clear A;
49
50 // Affichage de la condition initiale
51 xbasec();
52 rect=[0,a,0,a,0,1];
53 xtitle(['Condition initiale']);
54 plot3d(xx,xx,v(:, :, 1),233,81,"x@y@v(x,y,0)", [2,1,4],rect);
55
56 // Boucle sur le temps t_n : à chaque fois on résout le système
57 //   A V^(n+1) = B V^(n) grâce à la décomposition de CHOLESKY
58 // on obtient le vecteur V=A^{-1} B V^(n)
59 // ensuite reconstruction de v(x,y,t(i)) et affichage
60 for i=2:N
61     V=chsolve(spchoA,B*matrix(v(2:MM-1,2:MM-1,i-1),M^2,1));
62     v(2:MM-1,2:MM-1,i)=matrix(V,M,M);
63     xclear();
64     xtitle(['Solution à l''instant t('+string(i)+'')='+string(t(i))]);
65     plot3d(xx,xx,v(:, :, i),233,81,"x@y@u(x,y,t)", [2,1,4],rect)
66 end
67 clear B,V;

```

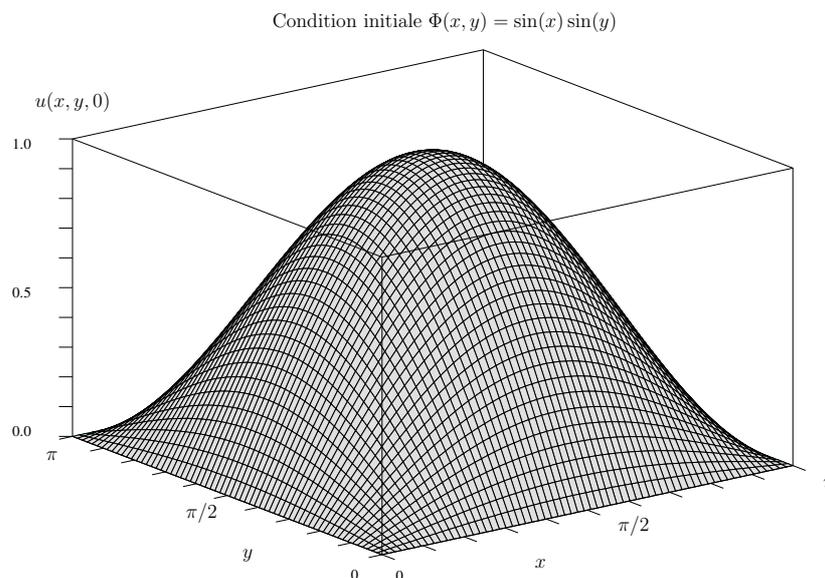
On obtient l'affichage des paramètres :

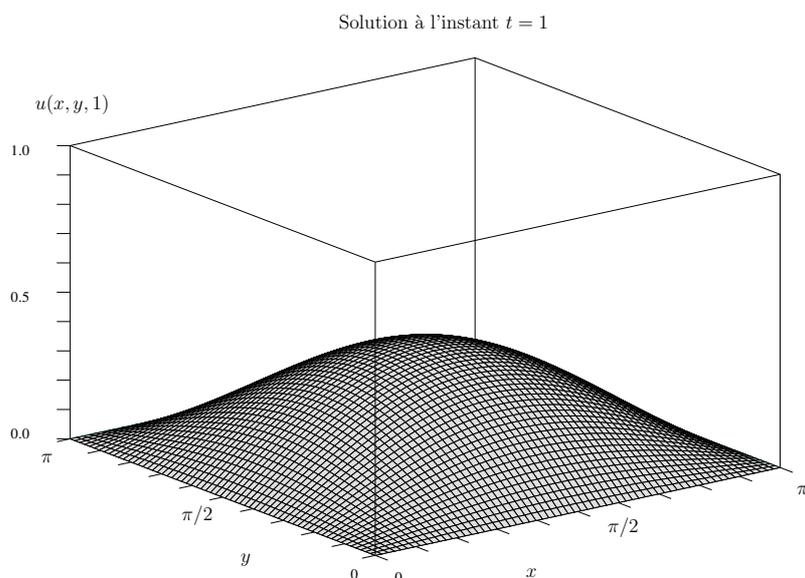
```

d=0.500000      a=3.141593      T=1.000000
h=0.050000      k=0.010000
mu=4.000000     lambda=0.200000
N=101  M=62  M^2=3844
Stacksize=5000000, used=1024430

```

et, les graphes suivants :





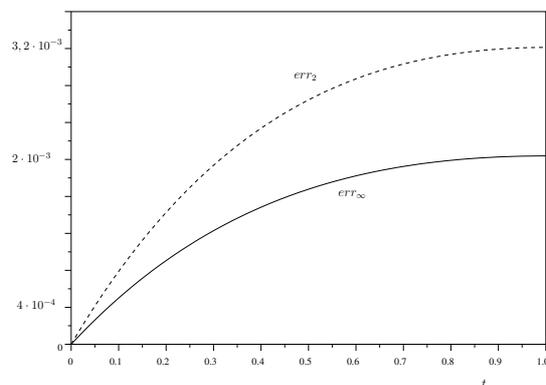
On peut de nouveau facilement calculer la solution  $u$  de l'équation aux dérivées partielles et comparer à chaque étape la solution discrète  $v$  à  $u$ . On utilise pour cela

$$err_{\infty}(t_n) = \sup_{(x_m, y_p)} |u(x_m, y_p, t_n) - v(x_m, y_p, t_n)|$$

et

$$err_2(t_n) = h \left( \sum_{(x_m, y_p)} |u(x_m, y_p, t_n) - v(x_m, y_p, t_n)|^2 \right)^{1/2},$$

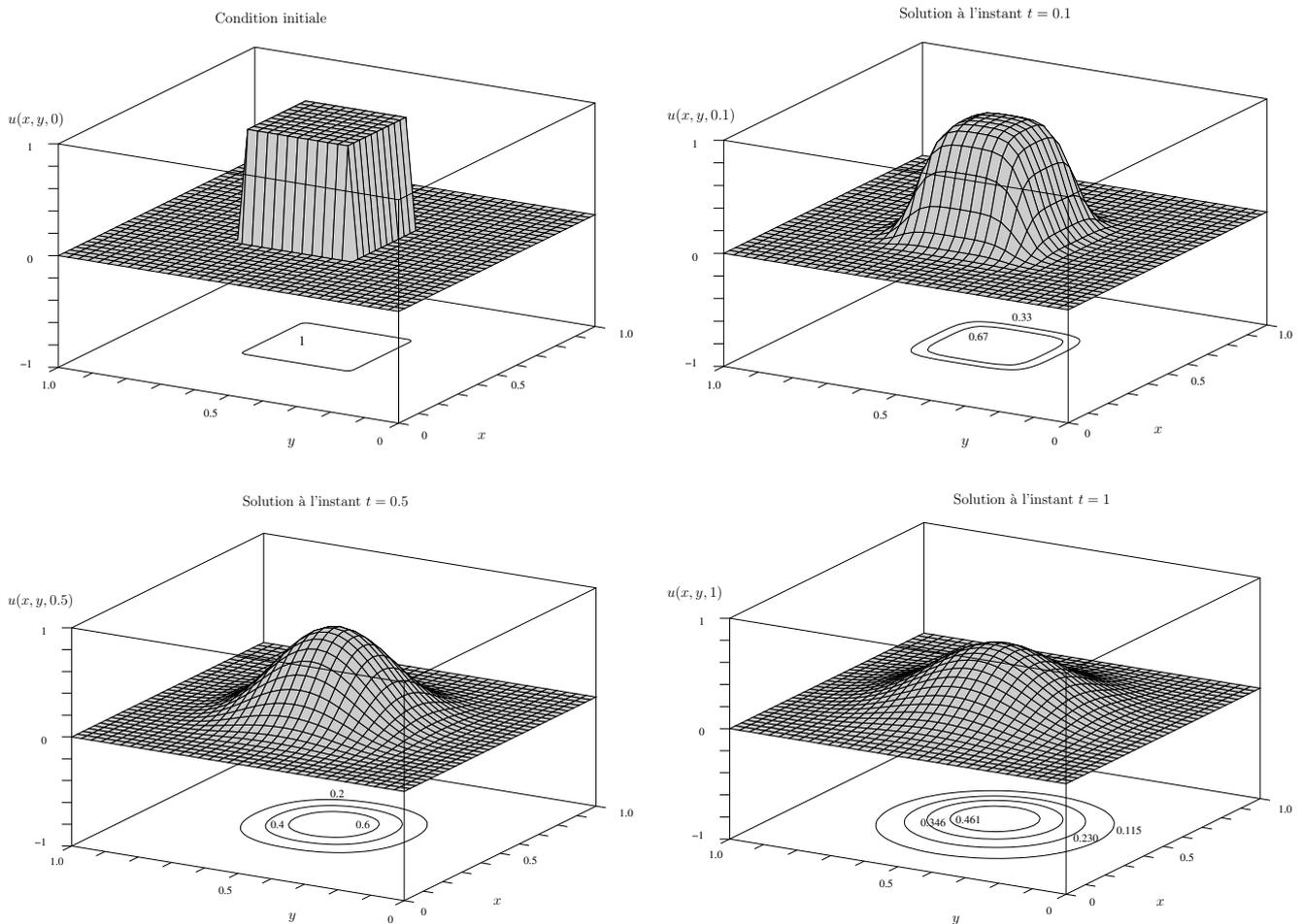
où  $h = 0,05$ . La figure suivante représente l'évolution de ces erreurs au cours du temps.



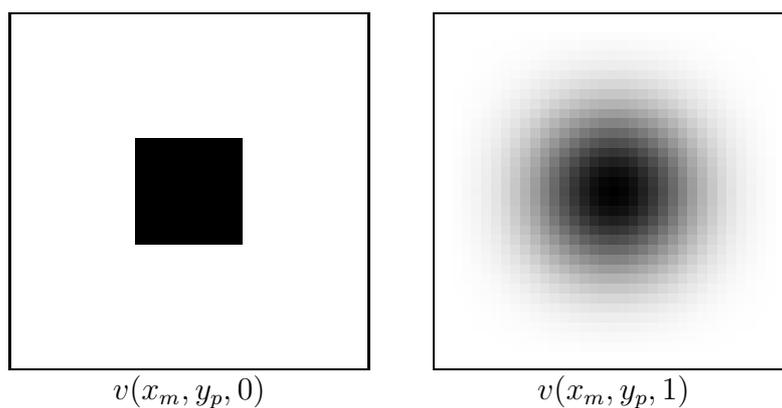
Pour voir l'effet de la diffusion sur une donnée initiale irrégulière, on se propose d'étudier sur  $]0, 1[^2$  l'évolution de la fonction  $\Phi(x, y) = \mathbb{I}_{[1/3, 2/3]}(x, y)$ . On obtient des résultats numériques satisfaisants pour  $\lambda = k/h$  petit.

En adaptant le code précédent, on obtient les résultats suivants :

```
d=0.010000      a=1.000000      T=1.000000
h=0.030000      k=0.002000
mu=2.222222     lambda=0.066667
N=501  M=33     M^2=1089
Stacksize=5000000, used=672021
```



Sur ces graphiques on a représenté aussi quelques lignes de niveau de  $v$ , ceci afin de visualiser la «diffusion» du cube initial. Une autre façon de représenter  $v$  est d'associer des niveaux de gris aux valeurs que prend la fonction, ce qui donne les figures suivantes, où 0=blanc et 1=noir :



**Remarque :** Pour les images des pages 9 et suivantes, on a 255=blanc et 0=noir ; on y a utilisé des schémas moins coûteux. En effet, l'algorithme de cette section qui utilise la méthode de CRANK-NICOLSON, est très précis, mais il nécessite beaucoup de place mémoire et de temps de calcul. En dimension spatiale deux on utilise souvent d'autres méthodes.

### 5.5.3 Système de réaction-diffusion

Un exemple de système de réaction-diffusion qui engendre des rayures a été proposé par MEINHARDT <sup>2</sup> :

$$\begin{cases} \frac{\partial c_1}{\partial t} = d_c \Delta c_1 + \frac{c_1^2 s_2}{r} - \rho_c c_1 \\ \frac{\partial c_2}{\partial t} = d_c \Delta c_2 + \frac{c_2^2 s_1}{r} - \rho_c c_2 \\ \frac{\partial s_1}{\partial t} = d_s \Delta s_1 + \rho_s (c_1 - s_1) \\ \frac{\partial s_2}{\partial t} = d_s \Delta s_2 + \rho_s (c_2 - s_2) \\ \frac{\partial r}{\partial t} = c_1^2 s_2 + c_2^2 s_1 - \rho_r r \end{cases}$$

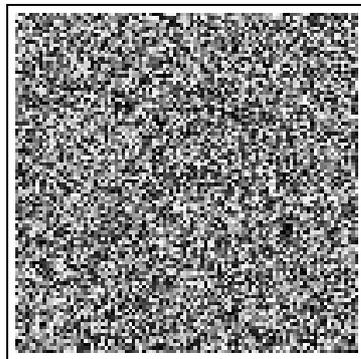
où les cinq «morphogènes»  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $s_1$ ,  $s_2$  et  $r$  sont définies sur  $[0, M]^2 \times \mathbb{R}_+$ . Le comportement du système dépend des paramètres réels  $d_c$ ,  $d_s$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_s$  et  $\rho_r$  et des conditions initiales.

Pour ce type de simulation on a besoin d'un nombre élevé d'itérations,  $N$ , et il devient nécessaire d'utiliser un programme compilé. Ainsi le système ci-dessus a été programmé en langage "C" en utilisant les bibliothèques de Megawave<sup>3</sup>. On a utilisé un schéma explicite, progressif en temps et centré en espace, avec des conditions au bord périodiques. Les conditions initiales sont données par

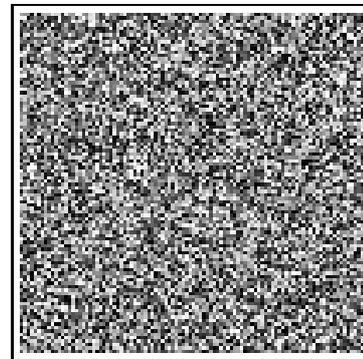
$$\begin{aligned} c_1(x, y, 0) &= \frac{\rho_r}{2\rho_c} (1 + \epsilon_1(x, y)), & c_2(x, y, 0) &= \frac{\rho_r}{2\rho_c} (1 + \epsilon_2(x, y)), \\ s_1(x, y, 0) &= s_2(x, y, 0) = \frac{\rho_r}{2\rho_c}, & r(x, y, 0) &= \frac{\rho_r^2}{4\rho_c^3}, \end{aligned}$$

pour  $(x, y) \in [0, M]^2$  et où  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  est un bruit uniforme, de valeurs dans  $[-\rho_\epsilon, \rho_\epsilon]$ , avec  $\rho_\epsilon > 0$  donné. La discrétisation spatiale est fixée à  $h = 1$  dans les deux directions, le pas de temps  $k$  est obtenu en choisissant  $\mu : k = \mu h^2 = \mu$ . Le choix des paramètres pour les premières simulations est indiqué dans la table suivante :

$\mu = 0,0100$	$M = 100$	$N = 30.000$
$d_c = 0,0500$	$d_s = 0,1000$	$\rho_\epsilon = 0,1000$
$\rho_c = 0,4000$	$\rho_s = 0,4000$	$\rho_r = 0,6000$


 $c_1(x_m, y_p, 0)$ 

min=0,60000 / max=0,74996

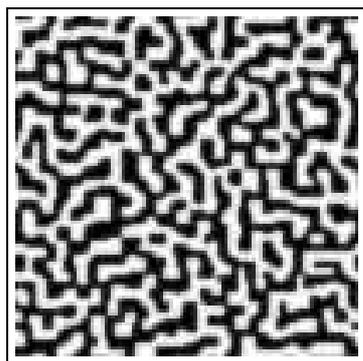

 $c_2(x_m, y_p, 0)$ 

min=0,60002 / max=0,75000

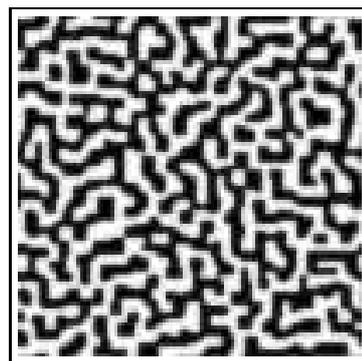
<sup>2</sup> *Models of Biological Pattern Formation*, Academic Press, 1982

<sup>3</sup> © logiciel disponible à <http://www.cmla.ens-cachan.fr/Cmla/Megawave>

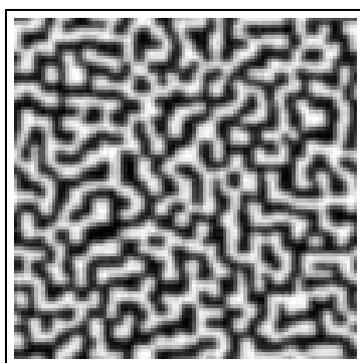
**Note :** Toutes les images ont été renormalisées dans  $[0, 255]$ .



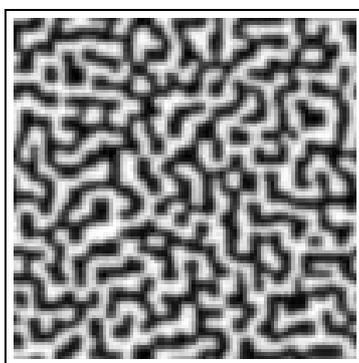
$c_1(x_m, y_p, kN)$   
min=0,01389 / max=1,98951



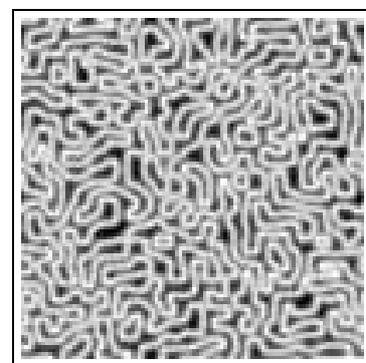
$c_2(x_m, y_p, kN)$   
min=0,01164 / max=1,98889



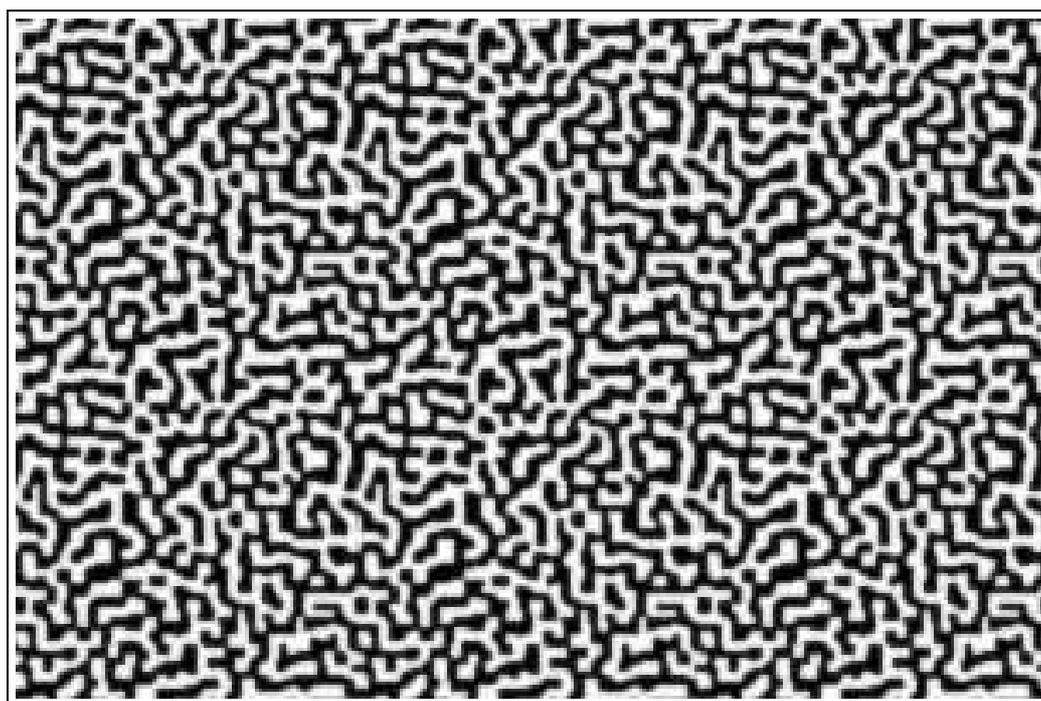
$s_1(x_m, y_p, kN)$   
min=0,01889 / max=3,82714



$s_2(x_m, y_p, kN)$   
min=0,01734 / max=3,81700



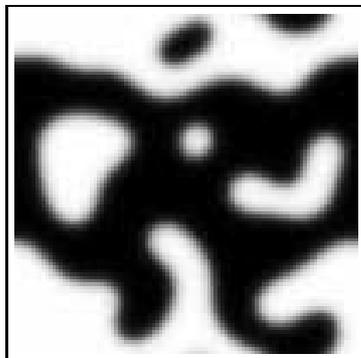
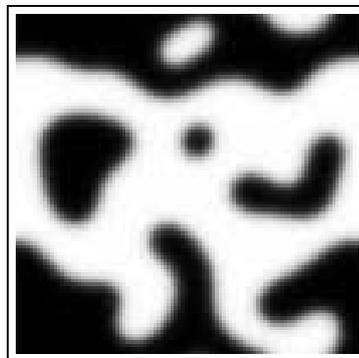
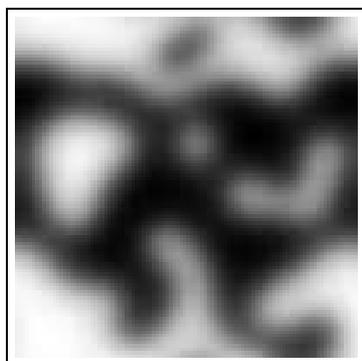
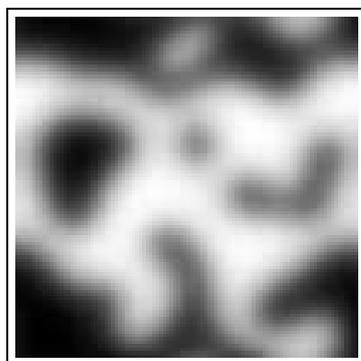
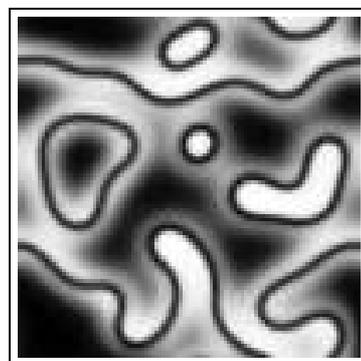
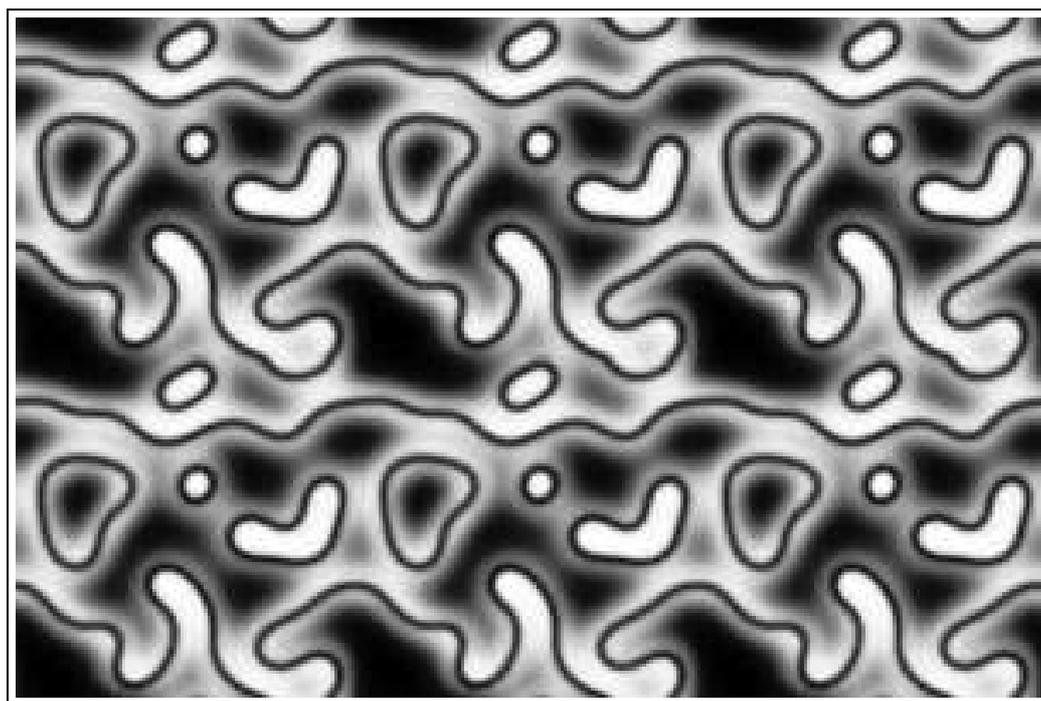
$r(x_m, y_p, kN)$   
min=1,14387 / max=7,58884



Utilisation de la périodicité de  $c_1$  pour paver le plan.

Pour les paramètres du tableau suivant on obtient les zébrures représentées en dessous.

$\mu = 0,0050$	$M = 100$	$N = 50.000$
$d_c = 0,1500$	$d_s = 0,2000$	$\rho_\epsilon = 0,1000$
$\rho_c = 0,4000$	$\rho_s = 0,4000$	$\rho_r = 0,8000$


 $c_1(x_m, y_p, kN)$ 

 $c_2(x_m, y_p, kN)$ 

 $s_1(x_m, y_p, kN)$ 

 $s_2(x_m, y_p, kN)$ 

 $r(x_m, y_p, kN)$ 


Utilisation de la périodicité de  $r$  pour paver le plan.

# Annexes



# Annexe A

## Calcul différentiel et intégration dans $\mathbb{R}^d$

### A.1 Notations

Un point  $x = (x_1, \dots, x_d)$  de  $\mathbb{R}^d$  considéré comme vecteur sera noté  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$

dont la transposé,  $x^t = (x_1 \ \dots \ x_d)$ , est une matrice  $1 \times d$ .

La norme euclidienne de  $x$  est noté  $|x| = \left( \sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2}$  et le produit scalaire des vecteurs

$x$  et  $y$  s'écrit  $x \cdot y = x^t y = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , pour  $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ , on note  $D_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a)$  la dérivée partielle de  $f$  en  $a$  par rapport à la variable  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}$  on a  $D_i^k f(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(a)$ .

On note  $Df(a) = \left( D_1 f(a) \ D_2 f(a) \ \dots \ D_d f(a) \right)$  la matrice ligne ( $1 \times d$ ) associé à l'application différentielle  $df_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ .

Le *vecteur gradient* est le vecteur colonne ( $d \times 1$ )  $\nabla f(a) = Df(a)^t$ .

Dans la suite on va souvent utiliser la notation des multi-indices de L. SCHWARTZ.

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  et  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ , on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d! \quad \text{et} \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}.$$

Pour  $f \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , on note

$$D^\alpha f(a) = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_d^{\alpha_d} f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(a),$$

c'est la dérivée partielle d'ordre  $|\alpha|$  de  $f$ , on dérive  $\alpha_i$  fois par rapport à  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

Soit  $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$  et  $x = (x_1, \dots, x_d)$ , alors si  $F(x_1, \dots, x_d) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ , on note

$$DF(x) = \begin{pmatrix} D_1F_1(x) & D_2F_1(x) & \dots & D_dF_1(x) \\ D_1F_2(x) & D_2F_2(x) & \dots & D_dF_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1F_n(x) & D_2F_n(x) & \dots & D_dF_n(x) \end{pmatrix} = (D_1F(x) \ D_2F(x) \ \dots \ D_dF(x)).$$

C'est la matrice  $(n \times d)$  associée à l'application différentielle  $dF_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$  qui est composée des  $d$  vecteurs colonnes  $D_iF(x)$ .

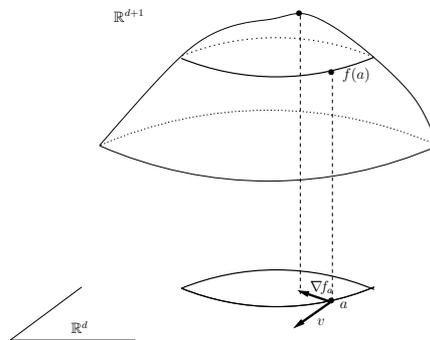
## A.2 Calcul différentiel

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , on définit la *dérivée directionnelle* de  $f$  au point  $a \in \mathbb{R}^d$  et dans la direction de  $v \in \mathbb{R}^d$ , par

$$\frac{df}{dv}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + hv) - f(a)).$$

On montre que

$$\frac{df}{dv}(a) = \nabla f(a) \cdot v \quad \parallel$$



Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ , la notation des multi-indices de L. SCHWARTZ permet d'énoncer facilement les résultats suivants :

Si  $P(x)$  est un polynôme de  $d$  variables,  $x_1, \dots, x_d$ , et de degré  $m$ ,

$$\text{alors} \quad P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha P(0)) x^\alpha.$$

En particulier pour  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $m \in \mathbb{N}$  :  $(x_1 + \dots + x_d)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha$ ,

c'est un *polynôme homogène d'ordre  $m$* .

Le facteur  $\frac{m!}{\alpha!} = \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!}$  est appelé *coefficient multinomial*.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $f \in \mathcal{C}^n(\Omega, \mathbb{R})$ . On suppose que  $0 \in \Omega$  et que le segment  $[0, x] \subset \Omega$ , alors la *formule de TAYLOR* avec reste intégral, pour  $f$  en  $0 \in \mathbb{R}^d$ , s'écrit

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{|\alpha|=p} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0) x^\alpha + \sum_{|\alpha|=n} \frac{n}{\alpha!} \left( \int_0^1 (1-s)^{n-1} D^\alpha f(sx) ds \right) x^\alpha . \quad \parallel$$

Soient  $f$  et  $g$  des fonctions régulières sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , on a la *formule de LEIBNIZ* :

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta, \gamma / \beta + \gamma = \alpha} \frac{\alpha!}{\beta! \gamma!} (D^\beta f) (D^\gamma g) .$$

Pour  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  régulière, et pour  $x, v$  dans  $\mathbb{R}^d$  et  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\frac{d^m}{dt^m} f(x + tv) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha f(x + tv)) v^\alpha .$$

### A.3 Intégration dans $\mathbb{R}^d$

On va noter dans cette section  $d\lambda_d$  ou  $dx$  la mesure de LEBESGUE sur  $\mathbb{R}^d$ . On rappelle le résultat suivant.

**THÉORÈME A.3.1 (CHANGEMENT DE VARIABLES DANS  $\mathbb{R}^d$ )**

Soit  $U$  et  $V$  des ouverts de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Phi$  un difféomorphisme de  $U$  sur  $V$  et soit  $f$  une fonction intégrable sur  $V$ , alors

$$\int_V f(x) dx = \int_U f(\Phi(y)) |dét(D\Phi(y))| dy \quad \text{ou encore} \quad \int_U f \circ \Phi d\lambda_d = \int_V f |dét(D\Phi^{-1})| d\lambda_d .$$

On note  $B_d(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d / |x - x_0| < r\}$ , la boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ , la *boule unité* de  $\mathbb{R}^d$  est notée  $B_d = B_d(0, 1)$ .

De même  $S^{d-1}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d / |x - x_0| = r\} = \partial B_d(x_0, r)$

et  $S^{d-1} = \partial B_d(0, 1)$  est la *sphère unité* de  $\mathbb{R}^d$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et  $h(x) = \frac{x}{|x|}$ , on obtient un homéomorphisme  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^d$  sur  $]0, +\infty[ \times S^{d-1}$  en posant  $\Phi(x) = (|x|, h(x)) = (r, s)$  et  $\Phi^{-1}(r, s) = rs$ .

**PROPOSITION A.3.1 (COORDONNÉES POLAIRES)**

Soit  $f$  intégrable sur  $\mathbb{R}^d$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x) = \int_{]0, +\infty[ \times S^{d-1}} f(rs) r^{d-1} d\lambda(r) d\sigma_{d-1}(s) = \int_0^{+\infty} dr \left( \int_{S^{d-1}(0, r)} f(x) dS(x) \right) .$$

L'image de  $\lambda_d$  par  $\Phi$  est la mesure produit  $r^{d-1} dr \otimes d\sigma_{d-1}$ , où  $\sigma_{d-1}$  est une mesure sur  $\mathcal{B}(S^{d-1})$ .

## COROLLAIRE A.3.1

Soit  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  borelienne, on pose  $f(x) = \varphi(|x|)$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^d$  si et seulement si  $\varphi(r)r^{d-1}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

## COROLLAIRE A.3.2

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$  et  $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ , alors

- pour tout  $\alpha < d$  :  $f$  est intégrable sur  $B_d$  et n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}^d \setminus B_d$  ;
- pour tout  $\alpha > d$  :  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^d \setminus B_d$  et n'est pas intégrable sur  $B_d$  ;
- pour  $\alpha = d$  :  $f$  n'est intégrable ni sur  $B_d$ , ni sur  $\mathbb{R}^d \setminus B_d$ .

## COROLLAIRE A.3.3

On note  $\bar{\omega}_d$  le volume de la boule unité  $B_d$  de  $\mathbb{R}^d$  et  $\omega_d$  l'aire de la sphère unité  $S^{d-1}$  de  $\mathbb{R}^d$ , on a les relations :

$$\begin{aligned} \text{vol}(B_d(0, 1)) &= \bar{\omega}_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(\frac{d}{2})} \\ \text{vol}(B_d(0, r)) &= r^d \bar{\omega}_d \\ \text{aire}(S^{d-1}(0, 1)) &= \omega_d = d\bar{\omega}_d = 2\frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \\ \text{aire}(S^{d-1}(0, r)) &= r^{d-1} \omega_d \end{aligned}$$

**Exemples :**

On retrouve ainsi, pour  $d = 2$ , que le «volume» d'un disque est  $\pi r^2$  (=surface) et que l'«aire» d'un cercle est  $2\pi r$  (=périmètre).

Pour  $d = 3$  on retrouve  $\bar{\omega}_3 = \frac{4\pi}{3}$  et  $\omega_3 = 4\pi$ .

## PROPOSITION A.3.2

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}^d$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  :

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^d \bar{\omega}_d} \int_{B_d(x, r)} f(y) dy = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{d-1} \omega_d} \int_{S^{d-1}(x, r)} f(y) dS_y.$$

Avec des hypothèses plus faibles on a le résultat suivant :

## THÉORÈME A.3.2 (THÉORÈME DE DÉRIVATION DE LEBESGUE)

Pour tout  $f$  de  $L^1(\mathbb{R}^d)$  on a :

- (a) pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^d$  :  $f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^d \bar{\omega}_d} \int_{B_d(x, r)} f(y) dy$  ;
- (b) pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^d$  :  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^d \bar{\omega}_d} \int_{B_d(x, r)} |f(y) - f(x)| dy = 0$ .

On dit que  $x$  est un point de LEBESGUE de  $f$  s'il vérifie (b).

# Annexe B

## Géométrie différentielle élémentaire. Intégrale de surface

### B.1 Variétés dans $\mathbb{R}^d$

Dans cette section on va généraliser la notion de courbe paramétrique dans  $\mathbb{R}^d$ , définie par  $(X_1(t), \dots, X_d(t))$ , et celle de surface dans  $\mathbb{R}^{d+1}$ , définie par le graphe d'une fonction  $z = f(x_1, \dots, x_d)$ .

#### DÉFINITION B.1.1

Soit  $M \subset \mathbb{R}^d$  et  $a \in M$ , on dit que  $M$  est une variété régulière de dimension  $k$  au voisinage de  $a$  s'il existe :

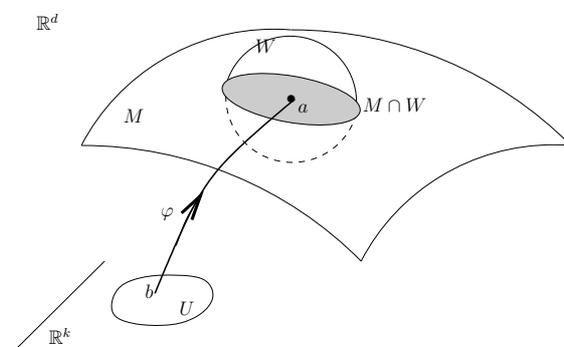
$U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ ,  $k \leq d$ ,  $W$  un voisinage ouvert de  $a$  dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^d)$  tel que :  $\varphi$  est un homéomorphisme de  $U$  sur  $W \cap M$  et pour tout  $u \in U$ ,  $\varphi$  est de rang  $k$ , c'est-à-dire  $\text{rang}(D\varphi(u)) = k$  pour tout  $u \in U$ .

On dit que  $\varphi$  est une paramétrisation de  $M$  au voisinage de  $a$ .

$M$  est une variété régulière de dimension  $k$ , si  $M$  est au voisinage de tout point  $a$  une  $k$ -variété régulière.

On obtient ainsi une collection de paramétrisations locales et on appelle  $(W_\alpha \cap M, \varphi_\alpha)$  une carte et  $\{(W_\alpha \cap M, \varphi_\alpha)\}_\alpha$  un atlas de  $M$ .

En anglais une variété s'appelle manifold.



**Exemples :** Soit  $M$  une  $k$ -variété régulière de  $\mathbb{R}^d$ . Pour  $k = 1$ ,  $M$  est une *courbe* ; pour  $k = 2$ , c'est est une *surface* ; pour  $k = d - 1$ , on dit que  $M$  est une *hypersurface*.

## THÉORÈME B.1.1

Soit  $M \subset \mathbb{R}^d$  et  $a = (a_1, \dots, a_d) \in M$ , on a équivalence des affirmations suivantes :

(P)  $M$  est une  $k$ -variété régulière au voisinage de  $a$ .

(Z) Il existe  $W$  un voisinage ouvert de  $a$  dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\Phi \in \mathcal{C}^1(W, \mathbb{R}^{d-k})$  tel que :  
 $\Phi$  est de rang  $d - k$  en  $a$ ,  $\Phi(a) = 0$  et  $\Phi^{-1}(0) = W \cap M$ .

(G) Il existe  $W$  un voisinage ouvert de  $a$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $V$  un voisinage ouvert de  $(a_1, \dots, a_k)$  dans  $\mathbb{R}^k$  et  $\psi \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^{d-k})$  tel que, si on note  $\psi = (\psi_{k+1}, \dots, \psi_d)$ , on a pour tout  $x \in W \cap M$  et pour  $k + 1 \leq i \leq d$  :  $\psi_i(x_1, \dots, x_k) = x_i$ .

## Remarques :

a) Avec (P) on représente  $M$  localement comme l'image d'une application  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  ; (Z) exprime que  $M$  est localement l'ensemble des points qui annulent une application  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$  ; finalement (G) montre que  $M$  est localement le graphe d'une application  $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{d-k}$ .

b) (G) est vérifiée à une permutation des coordonnées près.

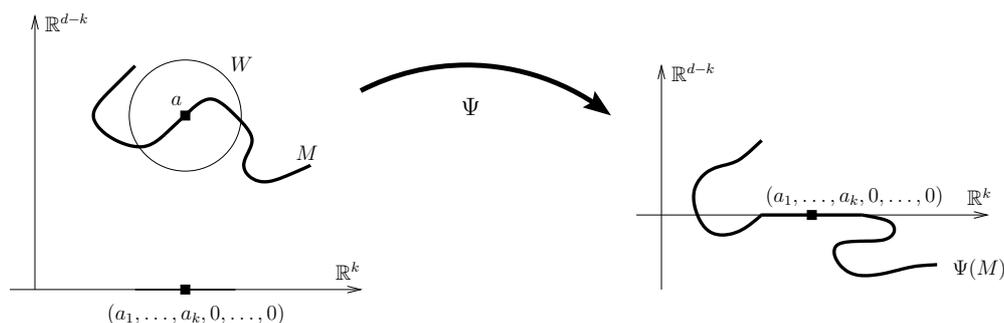
Par ailleurs (G) est un cas particulier des représentations (P) et (Z), en effet, si on se donne  $\psi$ , alors  $\varphi(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_k, \psi_{k+1}(x_1, \dots, x_k), \dots, \psi_d(x_1, \dots, x_k))$  est une paramétrisation, *i.e.* vérifie (P), et  $\Phi(x_1, \dots, x_d) = \psi(x_1, \dots, x_k) - (x_{k+1}, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-k}$  est une application qui s'annule au voisinage de  $a$ , *c.à.d.* vérifiant (Z).

c) Dans (Z), l'hypothèse que  $\Phi$  est de rang  $d - k$  en  $a$ , *i.e.*  $\text{rang}(D\Phi(a)) = d - k$ , est équivalente à demander que  $d\Phi_a$  est surjective de  $\mathbb{R}^d$  sur  $\mathbb{R}^{d-k}$ , *c'est-à-dire* que  $a$  n'est pas un point critique de  $\Phi$ .

d) En utilisant (G) on peut toujours *aplatir* la  $k$ -variété régulière  $M$  au voisinage de  $a$  :  
 Soit  $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  défini par  $\Psi(x) = (\Psi_1(x), \dots, \Psi_d(x))$  où, pour  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} x_i & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ x_i - \psi_i(x_1, \dots, x_k) & \text{si } k + 1 \leq i \leq d \end{cases} \quad \text{et} \quad D\Psi = \begin{pmatrix} I_k & \vdots & 0_{k,d-k} \\ \vdots & -D\psi_{k+1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -D\psi_d & \vdots \end{pmatrix}.$$

Comme  $\det(D\Psi) = 1$ ,  $\Psi$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^d$  et on a pour tout  $x \in W \cap M$   
 $\Psi(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ .



**Exemples :**

1. Les variétés de dimension  $k = 0$  sont les points discrets de  $\mathbb{R}^d$ .  
Les variétés de dimension  $k = d$  sont les ouverts de  $\mathbb{R}^d$ .  
Tout sous-espace linéaire ou affine de  $\mathbb{R}^d$  est une variété régulière.
2. L'ensemble  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 x_2 = 0\}$  n'est pas une variété de  $\mathbb{R}^2$  :  
au voisinage de  $(0, 0)$  l'ensemble n'est pas homéomorphe à un segment de droite.
3. Soit  $M$  une 2-variété, *i.e.* une surface, de  $\mathbb{R}^3$  au voisinage de  $a = (a_1, a_2, a_3)$ .  
D'après (P) il existe une paramétrisation  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ , telle que  $\text{rang}(D\varphi) = 2$  en tout point de  $U$ .  
Si l'on note  $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$  pour  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

qui est de rang deux si et seulement si l'un au moins de ses trois sous-déterminants est non nul :

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

D'après (G) il existe  $\psi$  tel que  $x_3 = \psi(x_1, x_2)$  pour tout  $x = (x_1, x_2, x_3)$  de  $M \cap B_d(a, \epsilon)$ .

On en déduit une paramétrisation en posant  $\varphi_1(u, v) = u$ ,  $\varphi_2(u, v) = v$  et  $\varphi_3(u, v) = \psi(u, v)$  pour  $(u, v)$  dans un voisinage de  $(a_1, a_2)$ .

Si l'on pose  $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2) - x_3$  on a  $(x_1, x_2, x_3) \in \Phi^{-1}(0)$  pour tout  $x \in M \cap B_d(a, \epsilon)$ .

Application : Pour  $S^2$  on obtient une paramétrisation au voisinage du pôle nord  $a = (0, 0, 1)$ , avec  $\psi(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$  on a :

$$\varphi(u, v) = (u, v, \psi(u, v)) \text{ et } \Phi(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2) - x_3.$$

Que devient  $S^2$  si on l'aplatit au voisinage du pôle nord ?

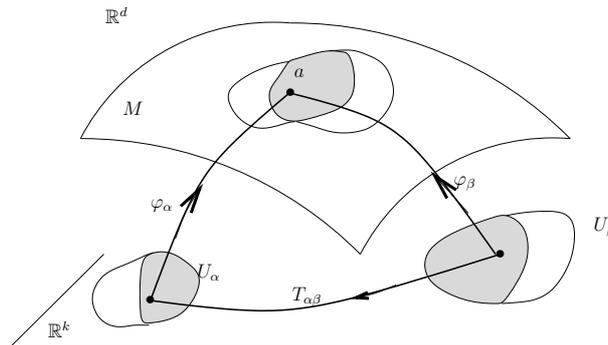
On a vu que si  $M$  est une variété régulière on a :  $M = \bigcup_{\alpha} \varphi_{\alpha}(U_{\alpha})$ . On va montrer que les recouvrements éventuels des cartes sont «différentiables», au sens de la

**PROPOSITION B.1.1**

Si on a deux paramétrisations  $\mathcal{C}^1$ ,  $\varphi_{\alpha}$  et  $\varphi_{\beta}$ , au voisinage de  $a \in M$ , alors il existe  $T_{\alpha\beta}$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^k$  sur  $\mathbb{R}^k$  qui permet de passer de l'une à l'autre. On définit :

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha}^{-1} \circ \varphi_{\beta} : \varphi_{\beta}^{-1}(\varphi_{\alpha}(U_{\alpha}) \cap \varphi_{\beta}(U_{\beta})) \longrightarrow \varphi_{\alpha}^{-1}(\varphi_{\alpha}(U_{\alpha}) \cap \varphi_{\beta}(U_{\beta})),$$

pour tout  $\alpha, \beta$  tel que  $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha}) \cap \varphi_{\beta}(U_{\beta}) \neq \emptyset$ .



## B.2 Espace tangent. Orientation d'une variété

**DÉFINITION B.2.1**

On appelle espace tangent à la  $k$ -variété régulière  $M$  au point  $a \in M$  et on note  $T_a M$ , le sous-espace vectoriel de dimension  $k$ , image de  $\mathbb{R}^k$  par l'application linéaire  $d\varphi_b$ , où  $a = \varphi(b)$ .

Soit  $a \in M$ ,  $a = \varphi(b)$ , alors si  $x \in a + T_a M$ , il existe  $v \in \mathbb{R}^k$  tel que  $\vec{ax} = x - a = d\varphi_b(v)$ .

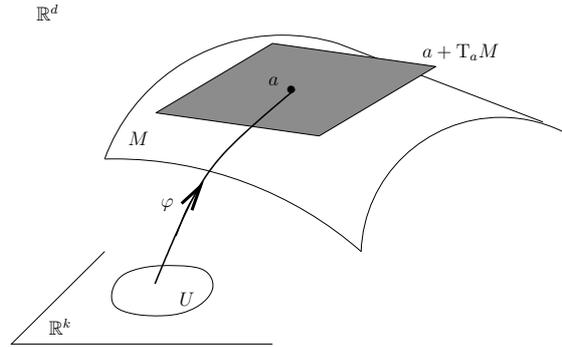
On a  $D\varphi_b = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_d}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial u_k} \end{pmatrix}_{|u=b}$ , on en déduit immédiatement :

Équation paramétrique de  $a + T_a M$  :  $x_i = a_i + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(b) v_j$  pour  $i = 1, \dots, d$ .

Cas d'une hypersurface :

Si  $k = d-1$  on obtient l'équation cartésienne de  $a + T_a M$  :

$$\begin{vmatrix} (x_1 - a_1) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_{d-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_d - a_d) & \frac{\partial \varphi_d}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial u_{d-1}} \end{vmatrix} = 0.$$



Comme  $M$  est une hypersurface de  $\mathbb{R}^d$ , on peut représenter  $M$  au voisinage de  $a$  grâce au graphe de  $\psi(u_1, \dots, u_{d-1})$ , avec  $a = (b, \psi(b))$  et  $b = (a_1, \dots, a_{d-1})$ .

$$\text{On a } D\varphi_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial\psi}{\partial u_1} & \frac{\partial\psi}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial u_{d-1}} \end{pmatrix} = (t_1 \quad \cdots \quad t_{d-1})$$

et la famille  $\{t_1, \dots, t_{d-1}\}$  est une base de l'hyperplan  $T_a M$ .

$$\text{On en déduit le vecteur normal unité à } M \text{ en } a : n(a) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\psi|^2}} \begin{pmatrix} -\psi_{u_1} \\ \vdots \\ -\psi_{u_{d-1}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Exemple :** On suppose que  $M$  est une surface dans  $\mathbb{R}^3$ , représentée localement par le graphe d'une fonction  $\psi$ . Avec les notations précédentes on a :  $a = (a_1, a_2, a_3) \in M$ ,  $\psi(a_1, a_2) = a_3$  et  $b = (a_1, a_2)$ , et une paramétrisation locale est donnée par  $\varphi(u, v) = (u, v, \psi(u, v))$ .

$$\text{Donc } D\varphi_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(b) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(b) \end{pmatrix} \text{ et l'équation cartésienne du plan tangent affine s'écrit :}$$

$$(x_1 - a_1) \frac{\partial\psi}{\partial u}(a_1, a_2) + (x_2 - a_2) \frac{\partial\psi}{\partial v}(a_1, a_2) - (x_3 - a_3) = 0.$$

$$\text{Pour } t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} \end{pmatrix} \text{ et } t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{pmatrix}, \text{ la famille } \{t_1, t_2\} \text{ est une base de } T_a M.$$

Le vecteur *normal unité* à  $M$  en  $a$  caractérise le s.e.v.  $T_a M$ , et est donnée par :

$$n(a) = \frac{t_1 \wedge t_2}{|t_1 \wedge t_2|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial\psi}{\partial u} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Application. Considérons de nouveau l'hémisphère nord de  $S^2$  :

pour  $u^2 + v^2 < 1$  et  $\psi(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ , on obtient  $n(u, v, \psi(u, v)) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}$ .

On va s'intéresser maintenant à l'orientation de  $M$ . Rappelons d'abord qu'un repère direct de  $\mathbb{R}^k$  vérifie  $\det(u_1, \dots, u_k) > 0$  et que l'on définit ainsi une orientation sur  $\mathbb{R}^k$ .

Soit  $\varphi_\alpha$  une paramétrisation locale de la  $k$ -variété régulière  $M$  au voisinage de  $a = \varphi_\alpha(b) \in M$ . L'image par  $d\varphi_\alpha(b)$  du repère direct est une base de  $T_aM$ . On définit ainsi un repère donc une orientation sur  $T_aM$ .

Soit  $\varphi_\beta$  une autre paramétrisation locale de  $M$  au voisinage de  $a$ . On a le changement de paramètres  $T_{\alpha\beta}(u) = (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)(u)$  pour  $u \in \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta))$  et  $d\varphi_\beta = d\varphi_\alpha \circ dT_{\alpha\beta}$ . On obtient la même orientation pour  $T_aM$  si  $\det(DT_{\alpha\beta}(u)) > 0$ .

### DÉFINITION B.2.2

On dit que la variété régulière  $(M, \{\varphi_\alpha\}_\alpha)$  est orientée si pour tout  $\alpha \neq \beta$  :  $\det(DT_{\alpha\beta}) > 0$  en tout point  $u$  où  $T_{\alpha\beta}$  est défini.

Une variété  $M$  est orientable s'il existe des paramétrisations locales  $\varphi_\alpha$  qui orientent  $M$ .

**Remarque :** Une variété n'est pas toujours orientable, la bande de Möbius est un contre-exemple.

### Exemples :

- Courbes dans  $\mathbb{R}^d$

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  une paramétrisation d'une courbe ( $k = 1$ ),  $\nabla\varphi$  est le vecteur tangent à la courbe, on l'utilise pour définir une orientation sur la courbe.

- Hypersurfaces dans  $\mathbb{R}^d$

Plus haut on a calculé le vecteur normal unité  $n(a)$  à une hypersurface de  $\mathbb{R}^d$ , il définit une orientation de  $M$ .

En particulier si  $M = \partial\Omega$ , où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , on pourra toujours choisir  $n(a)$  pointant vers l'*extérieur* de  $\Omega$ .

## Exemples de variétés régulières :

On présente ci-dessous quelques surfaces classiques de  $\mathbb{R}^3$ .

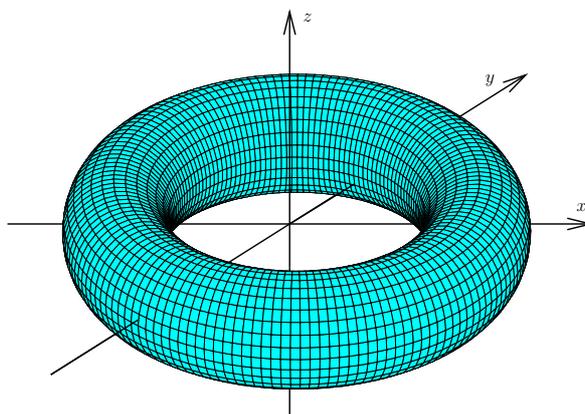
### Tore de révolution.

Soit  $0 < r < R$ , écrire une paramétrisation du cercle  $\mathcal{C}((R, 0), r)$  du plan  $xz$ . On obtient le tore de révolution en faisant tourner ce cercle autour de l'axe  $Oz$ .

Montrer qu'une paramétrisation du tore de révolution est donnée par

$$\varphi(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} (R + r \cos \alpha) \cos \beta \\ (R + r \cos \alpha) \sin \beta \\ r \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{pour } 0 \leq \alpha, \beta < 2\pi.$$

Vérifier que  $\varphi$  définit une paramétrisation locale du tore et que le tore est une surface orientable.



### Bande de Möbius (1858)

Soit  $R > 1$ , on considère une fine tige de longueur 2 dans le plan  $xz$  :

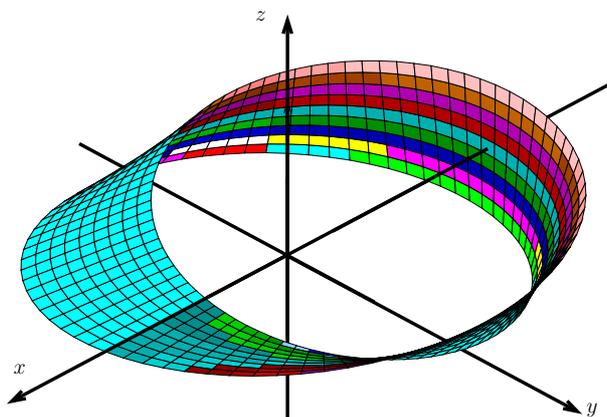
$$(x, z) = (R + t, 0) \quad \text{pour } -1 < t < 1.$$

On fait tourner la tige de 180 degrés autour de son centre et, en même temps, on lui fait faire un tour complet autour de l'axe  $Oz$ , la surface ainsi obtenue est une bande de Möbius.

Montrer qu'une paramétrisation de la bande de Möbius est donnée par

$$\varphi(t, \alpha) = \begin{pmatrix} (R + t \cos \alpha) \cos 2\alpha \\ (R + t \cos \alpha) \sin 2\alpha \\ t \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{pour } -1 < t < 1 \text{ et } 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

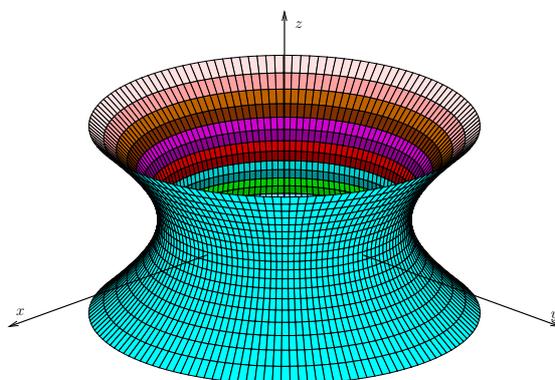
Vérifier que la bande de Möbius n'est pas orientable.



### Hyperboloïde à une nappe.

Soit  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ .

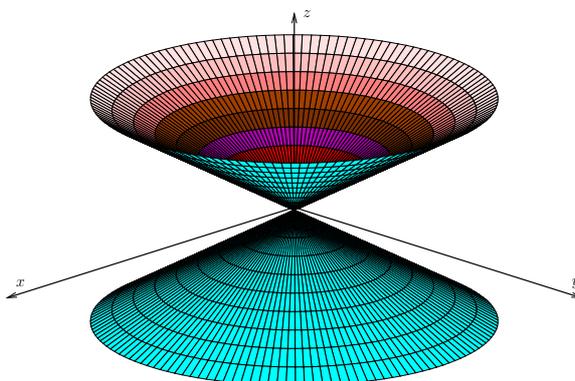
Montrer que  $M$  est une 2-variété régulière de  $\mathbb{R}^3$ . Donner une paramétrisation de  $M$ .



### Cône.

Soit  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ .

Donner une paramétrisation de  $M$ . Est-ce que  $M$  est une 2-variété régulière de  $\mathbb{R}^3$ ?



## B.3 Intégrale de surface

Dans cette section on va introduire l'intégrale d'une fonction définie sur une variété et mesurer l'aire de portions de variétés. On parle d'*intégrale de surface* et *aire de surface* même si  $k \neq 2$ .

Avant de passer à l'aire des variétés de  $\mathbb{R}^d$  on va s'intéresser au calcul, plus simple, du volume d'un parallélépipède de  $\mathbb{R}^d$ .

### PROPOSITION B.3.1

Soit  $P$  le parallélépipède engendré par les  $k$  vecteurs l.i.  $a_1, \dots, a_k$  de  $\mathbb{R}^d$  :

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid x = \sum_{i=1}^k t_i a_i, t_i \in [0, 1] \right\}.$$

On note  $A = (a_1 \ \dots \ a_k)$  la matrice  $d \times k$  de vecteurs colonnes  $a_1, \dots, a_k$ , alors

$$\begin{aligned} \text{si } k = d : \text{vol}(P) &= \det(A^t A)^{1/2}, \\ \text{si } k < d : \text{aire}(P) &= \det(A^t A)^{1/2} = \text{vol}_k(P). \end{aligned}$$

**Remarque :** On a  $A = (a_1 \ \dots \ a_k)$  avec  $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{di} \end{pmatrix}$  et  $A^t = \begin{pmatrix} a_1^t \\ \vdots \\ a_k^t \end{pmatrix}$ ,

$$\text{donc } A^t A = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_1 & a_1 \cdot a_2 & \dots & a_1 \cdot a_k \\ a_2 \cdot a_1 & a_2 \cdot a_2 & \dots & a_2 \cdot a_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k \cdot a_1 & a_k \cdot a_2 & \dots & a_k \cdot a_k \end{pmatrix} \text{ est une matrice carrée symétrique } k \times k$$

de déterminant strictement positif (cf. démonstration!).

### Exemples :

1. Dans  $\mathbb{R}^3$  on considère le parallélépipède engendré par :

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}, \text{ représenter } P.$$

Montrer que  $\text{vol}(P) = |a_{11}a_{22}a_{33}| = \text{base} \times \text{hauteur}$ .

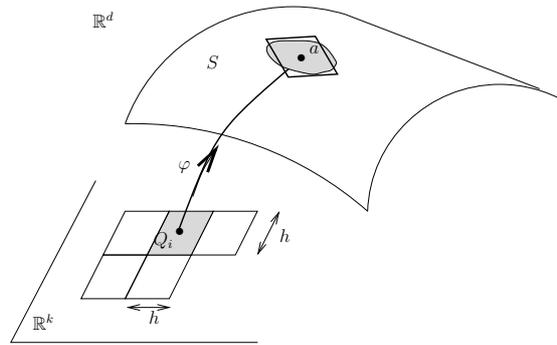
2. Dans  $\mathbb{R}^3$  on considère deux vecteurs l.i.  $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{di} \end{pmatrix}$  ( $i = 1, 2$ ) qui engendrent le parallélépipède  $P$ .

Montrer que  $\text{aire}(P) = |a_1 \wedge a_2|$ .

Soit  $S$  une *variété régulière compacte* de dimension  $k$ , c'est-à-dire tel qu'il existe une  $k$ -variété régulière  $M$  avec  $S \subset M$  et  $S$  compact. Soit  $\varphi : Q \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow S$  une paramétrisation de  $S$  que l'on suppose être une bijection de  $\text{Int}(Q)$  sur  $S$ .

On suppose de plus qu'il existe un pavage de  $Q$ , c'est-à-dire  $Q = \bigcup_{i=1}^l Q_i$ ,

où les  $Q_i$  sont des cubes de  $\mathbb{R}^k$ , disjoints, centrés en  $q_i$  et de côté  $h > 0$  :  $Q_i = q_i + \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]^k$ .



On se propose d'évaluer l'aire de  $S$ , on a :  $\text{aire}(S) = \sum_{i=1}^l \text{aire}(\varphi(Q_i))$

On va procéder par approximations : localement on remplace  $S$  par son plan tangent de façon à avoir  $\text{aire}(\varphi(Q_i)) \approx \text{aire}(d\varphi_{q_i}(Q_i))$ .

Si on note  $\{e_1, \dots, e_k\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^k$ , le cube  $Q_i$  est engendré par les vecteurs  $\{he_j\}_{j=1, \dots, k}$  et  $d\varphi_{q_i}(Q_i)$  est le parallélépipède engendré par les vecteurs  $\left\{h \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(q_i)\right\}_{j=1, \dots, k}$ .

Posons  $A_i = (h \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(q_i) \quad h \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(q_i) \quad \dots \quad h \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}(q_i)) = h D\varphi(q_i)$ , on a

$$\text{aire}(d\varphi_{q_i}(Q_i)) = \det(A_i^t A_i)^{1/2} = h^k \det(D\varphi_{q_i}^t D\varphi_{q_i})^{1/2}.$$

Donc  $\text{aire}(S) \approx \sum_{i=1}^l \det(D\varphi_{q_i}^t D\varphi_{q_i})^{1/2} \text{vol}_k(Q_i)$ .

En vue de cette approximation on définit :

$$\boxed{\text{aire}(S) = \int_Q \det(D\varphi_u^t D\varphi_u)^{1/2} du}$$

Soit  $f : S \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement intégrable sur  $\mathbb{R}^d$ , on définit :

$$\boxed{\int_S f(x) dS_x = \int_Q f(\varphi(u)) \det(D\varphi_u^t D\varphi_u)^{1/2} du}$$

Soient  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  deux paramétrisations de  $S$  :

$$\varphi : Q \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S, \quad \tilde{\varphi} : \tilde{Q} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S \quad \text{et} \quad \varphi(Q) = \tilde{\varphi}(\tilde{Q}).$$

Il existe un difféomorphisme  $T$  de  $Q$  sur  $\tilde{Q}$  :  $T = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$  et  $\det(DT) \neq 0$  sur  $Q$ .

Si l'on note  $\tilde{u} = T(u)$  et comme  $d\varphi_u = d\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \circ dT_u$  on a

$$\det(D\varphi_u^t D\varphi_u)^{1/2} = |\det(DT_u)| \det(D\tilde{\varphi}_{\tilde{u}}^t D\tilde{\varphi}_{\tilde{u}})^{1/2},$$

donc

$$\int_Q \det(D\varphi_u^t D\varphi_u)^{1/2} du = \int_Q \det(D\tilde{\varphi}_{T(u)}^t D\tilde{\varphi}_{T(u)})^{1/2} |\det(DT_u)| du = \int_{\tilde{Q}} \det(D\tilde{\varphi}_{\tilde{u}}^t D\tilde{\varphi}_{\tilde{u}})^{1/2} d\tilde{u}.$$

D'où le résultat suivant :

### PROPOSITION B.3.2

*La définition de l'aire d'une variété régulière compacte, respectivement de l'intégrale sur une telle variété, est indépendante de la paramétrisation choisie.*

### Exemples :

1. Soit  $C$  une courbe régulière ( $k = 1$ ) dans  $\mathbb{R}^d$ , et  $\varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  une paramétrisation.

Comme  $D\varphi_u = \nabla\varphi(u)$ , on a  $D\varphi_u^t D\varphi_u = |\nabla\varphi(u)|^2$  et, en remarquant qu'ici l'aire est en fait la longueur :

$$\boxed{\text{long}(C) = \int_a^b |\nabla\varphi(u)| du = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^d \varphi_i'(u)^2} du}$$

2. Soit  $S$  une surface régulière ( $k = 2$ ) dans  $\mathbb{R}^d$ , et une paramétrisation

$$\begin{aligned} \varphi : Q \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \dots, \varphi_d(u, v)) \end{aligned}.$$

On a  $D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{pmatrix}$  d'où  $D\varphi^t D\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{pmatrix}$  et, si on note

$$E = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial\varphi_i}{\partial u} \right)^2, \quad F = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial\varphi_i}{\partial u} \frac{\partial\varphi_i}{\partial v} \quad \text{et} \quad G = \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial\varphi_i}{\partial v} \right)^2,$$

on obtient

$$\boxed{\text{aire}(S) = \iint_Q \sqrt{EG - F^2} du dv}$$

3. Soit  $S$  une hypersurface régulière ( $k = d - 1$ ) dans  $\mathbb{R}^d$ , et une paramétrisation

$$\varphi : \begin{array}{ccc} Q \subset \mathbb{R}^{d-1} & \longrightarrow & S \\ (u_1, \dots, u_{d-1}) & \longmapsto & (u_1, \dots, u_{d-1}, \psi(u_1, \dots, u_{d-1})) \end{array},$$

c'est-à-dire que  $S$  est le graphe de  $\psi$ .

On a  $D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial u_1} & \frac{\partial \psi}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial u_{d-1}} \end{pmatrix}$  et on montre que

$$\det(D\varphi^t D\varphi) = \sum_{i=1}^{d-1} \left( \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \right)^2 = 1 + |\nabla \psi|^2$$

d'où

$$\boxed{\text{aire}(S) = \int_Q \sqrt{1 + |\nabla \psi(u)|^2} du}$$

Cas particulier :  $d = 3$  et  $k = 2$ , si  $S$  est représentée comme graphe de  $\psi : z = \psi(u, v)$  pour  $(u, v) \in Q \subset \mathbb{R}^2$  on trouve

$$\text{aire}(S) = \iint_Q \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2} dudv.$$

Application : montrer que l'aire du tore de révolution est  $4\pi^2 rR$ .

# Annexe C

## Éléments d'analyse vectorielle

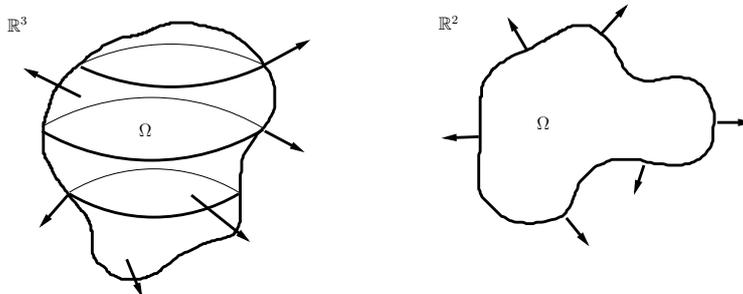
Dans cette annexe on va rappeler quelques formules fondamentales de l'analyse vectorielle :  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$  et on suppose que  $\partial\Omega$  est une  $(d-1)$ -variété régulière orientée. On définit un *champ de vecteurs*  $U : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  et un *champ scalaire*  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\overline{\Omega}$ .

La *divergence* de  $U$  est définie par  $\operatorname{div}(U(x)) = \sum_{i=1}^d D_i U_i(x) = \operatorname{trace}(DU(x))$ .

On admet le théorème de la divergence ou formule de GAUSS-GREEN :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(U(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} U(x) \cdot n(x) \, dS_x$$

où  $n(x)$  est le *vecteur normal unité extérieur* à  $\Omega$  en  $x \in \partial\Omega$ .



On a la relation suivante pour le champ scalaire  $u$  et pour tout  $1 \leq i \leq d$  :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} u(x) n_i(x) \, dS_x$$

où  $n_i$  est la  $i$ -ème coordonnée du vecteur normal unité extérieur.

Soient  $u$  et  $v$  deux champs scalaires de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\overline{\Omega}$ , alors, pour tout  $1 \leq i \leq d$ , on a la *formule d'intégration par parties dans  $\mathbb{R}^d$*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) \, dS_x - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \, dx$$

Exercice : écrire cette formule dans le cas  $d = 1$ , avec  $\overline{\Omega} = [a, b]$ .

Si on suppose que  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\overline{\Omega}$ , on déduit de ce qui précède les formules de GREEN (1828) :

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn}(x) v(x) dS_x - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad (\text{I})$$

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \Delta v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{du}{dn}(x) v(x) - u(x) \frac{dv}{dn}(x) \right] dS_x \quad (\text{II})$$

**Remarque** : Les résultats précédents s'obtiennent à partir de la formule de STOKES qui est un résultat de l'étude des formes différentielles. En particulier on montre que si  $\partial\Omega$  est une variété orientée et régulière par morceaux les énoncés précédents restent vrais.

## Interprétation du théorème de la divergence

Dans le cas  $d = 3$  on va donner une justification «physique» du théorème de la divergence. Supposons que le volume  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est plongé dans un milieu de particules dont on connaît à chaque instant  $t$  et en chaque position  $x = (x_1, x_2, x_3)$  :

la vitesse  $V(x, t)$ , avec  $|V|$  [ $m/s$ ], et la concentration (densité)  $u(x, t)$  [ $particules/m^3$ ].

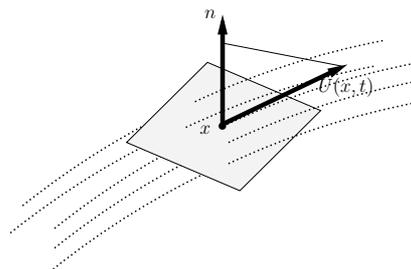
On suppose de plus qu'il n'y a ni création, ni destruction de particules et que  $V$  et  $u$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  pour  $x$  au voisinage de  $\overline{\Omega}$  et pour  $t \in \mathbb{R}$ .

On pose  $U = uV$ , avec  $U_i(x, t) = u(x, t)V_i(x, t)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) et  $|U|$  [ $particules/m^2 s$ ].

Soit  $n \in S^{d-1}$ , alors  $U(x, t) \cdot n$  est le flux de particules (par unité de temps) à travers un élément de surface plane, perpendiculaire à  $n$  en  $x$  et d'aire 1.

On a  $U(x, t) \cdot n = |U(x, t)| \cos(\angle(U, n))$  [ $particules/m^2 s$ ].

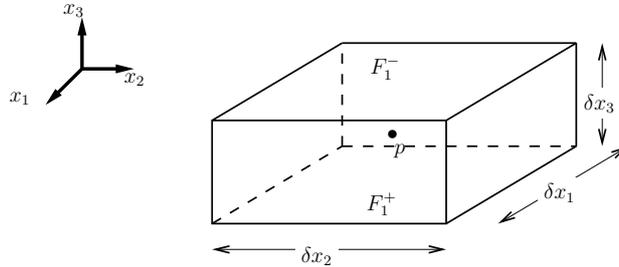
Note : le signe du flux est positif du «côté» de  $n$ .



À l'instant  $t$  le nombre de particules dans  $\Omega$  est  $m(t) = \int_{\Omega} u(x, t) dx$ .

La variation de masse  $m'(t)$ , négative si plus de particules sortent de  $\Omega$  qu'il n'en rentrent, est évaluée de deux façons différentes.

Méthode 1. Soit  $P \subset \Omega$  un parallélépipède rectangle infinitésimal, centré en  $p = (p_1, p_2, p_3)$ , de faces parallèles aux axes de coordonnées et de côtés  $\delta x_1, \delta x_2$  et  $\delta x_3$ . On note  $F_i^\pm = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / x_i = p_i \pm \frac{\delta x_i}{2} \text{ et pour } j \neq i : |x_j - p_j| \leq \frac{\delta x_j}{2} \right\}$  les six faces de  $P$ . Pour obtenir la variation de masse on va estimer le nombre de particules qui sortent du parallélépipède  $P$ .



On peut supposer que le flux de particules au centre de la face  $F_1^+$  est approximativement donnée par  $U_1(p) + \frac{1}{2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(p) \delta x_1$  et que la quantité de particules traversant  $F_1^+$  par unité de temps est donc approximativement égale à  $\left( U_1(p) + \frac{1}{2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(p) \delta x_1 \right) \delta x_2 \delta x_3$  (1).

On évalue de même le flux au centre de  $F_1^-$  à  $U_1(p) - \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(p) \frac{\delta x_1}{2}$  et donc la quantité de particules traversant  $F_1^-$  par unité de temps à  $\left( U_1(p) - \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(p) \frac{\delta x_1}{2} \right) \delta x_2 \delta x_3$  (2).

Finalement la variation du nombre de particules dans  $P$ , due à des déplacements dans la direction  $x_1$ , est (2) - (1) =  $-\frac{\partial U_1}{\partial x_1}(p) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ .

Cette valeur est positive si plus de particules rentrent dans  $P$  que n'en sortent par les faces  $F_1^+$  et  $F_1^-$ .

On obtient des résultats analogues pour la direction  $x_2$  (faces  $F_2^\pm$ ) et  $x_3$  (faces  $F_3^\pm$ ). La variation par unité de temps du nombre de particules dans  $P$  est donc donnée par  $-\left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(p) + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(p) + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}(p) \right) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 = -\text{div}(U(p)) \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$ .

En faisant la somme sur tous les parallélépipèdes rectangles infinitésimaux  $P$  contenus dans  $\Omega$  on a

$$m'(t) = - \int_{\Omega} \text{div}(U(x)) dx.$$

Méthode 2. On va mesurer maintenant le nombre de particules qui traversent  $\partial\Omega$  au cours du temps. Soit  $a \in \partial\Omega$  et  $S_a \subset \partial\Omega$  un élément de surface suffisamment petit pour être proche de  $a + T_a(\partial\Omega)$  et soit  $n(a)$  le vecteur normal unité extérieur à  $\partial\Omega$  en  $a$ .

Alors la variation par unité de temps du nombre de particules à travers  $S_a$  est donnée par  $U(a, t) \cdot n(a) \text{aire}(S_a) = u(a, t) \text{aire}(S_a) V(a, t) \cdot n(a)$ , et finalement en faisant la somme sur tous les éléments de surface  $S_a \subset \partial\Omega$  on obtient comme évaluation de la variation de masse

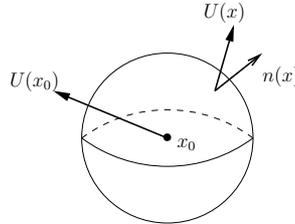
$$m'(t) = - \int_{\partial\Omega} U(x, t) \cdot n(x) dS_x.$$

Conclusion : en identifiant les variations  $m'(t)$  obtenus par les deux méthodes on trouve l'énoncé du théorème de la divergence.

Le théorème de la divergence permet de donner l'interprétation suivante de la divergence d'un champ de vecteurs  $U(x)$  :

$$\operatorname{div}(U(x_0)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\bar{\omega}_d \epsilon^d} \int_{S^{d-1}(x_0, \epsilon)} U(x) \cdot n(x) dS_x, \quad \parallel$$

c'est-à-dire que la divergence de  $U$  en  $x_0$  est le taux de particules (par unité de volume) qui «divergent» de  $x_0$ .



En utilisant la définition de  $m(t)$  et en dérivant sous le signe somme on obtient

$$\int_{\Omega} \left( \operatorname{div}(U) + \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = 0.$$

Si on a l'égalité ci-dessus pour tout volume  $\Omega$  on en déduit la loi d'équilibre du milieu

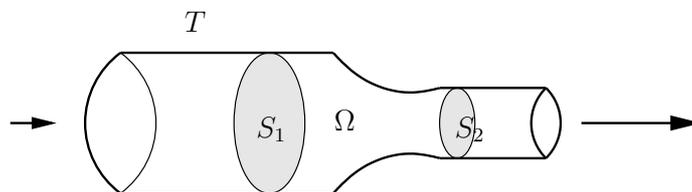
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(U) = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot V + u \operatorname{div}(V) = 0.$$

On dit que le flux est *incompressible* si  $\operatorname{div}(U) = 0$ , ici  $u = C^{te}$  et  $\operatorname{div}(V) = 0$ .

**Exemple :** On considère un tuyau  $T$  qui se resserre (cf. figure) et dans lequel coule un liquide, si le liquide est incompressible on a  $\int_{\Omega} \operatorname{div}(U) dx = \int_{\partial\Omega} U \cdot n dS = 0$  or  $\partial\Omega$  est composé de  $S_1 \cup S_2$  et des parois du tuyau sur lequel  $U = 0$ , on a donc

$$\int_{S_1} U \cdot n dS = - \int_{S_2} U \cdot n dS,$$

comme  $n_{S_2} = -n_{S_1}$ , on en déduit que le débit [*particules/s*] est constant.



## Le rotationnel d'un champ de vecteurs

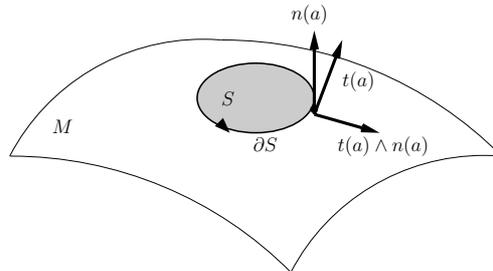
Pour compléter cet aperçu d'analyse vectorielle on introduit une autre quantité fréquemment utilisée dans l'étude des champs de vecteurs.

Supposons que le volume  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est plongé dans un milieu de particules et que le champ de vecteurs est régulier  $U \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ .

On définit le *vecteur rotationnel* de  $U$  en  $x = (x_1, x_2, x_3)$  par :

$$\text{rot}(U(x)) = \begin{pmatrix} (\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3})(x) \\ (\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1})(x) \\ (\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2})(x) \end{pmatrix} .$$

Soit  $S$  une surface (2-variété) orienté et compacte dans  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\partial S$  est une courbe (1-variété) orienté et régulière.



Quitte à inclure  $S$  dans une 2-variété orienté régulière  $M$ , on définit en tout point  $x$  de  $S \subset M$  le vecteur unité normal à  $S$ ,  $n(x)$ , pour  $a \in \partial S \subset M$  on définit en plus le vecteur unité tangent à  $\partial S$ ,  $t(a)$ .

On choisit  $t(a)$  tel que  $S$  se trouve à gauche en parcourant  $\partial S$ , c'est-à-dire que  $t(a) \wedge n(a)$  est le vecteur unité normal à  $\partial S$  et extérieur à  $S$  (cf. figure), alors, grâce au théorème de STOKES

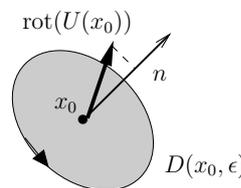
$$\boxed{\int_S \text{rot}(U(x)) \cdot n(x) dS_x = \int_{\partial S} U(x) \cdot t(x) d\sigma_x}$$

Soit  $n \in S^2$  et  $D(x_0, \epsilon)$  le disque de centre  $x_0$  et de rayon  $\epsilon$ , perpendiculaire à  $n$ , alors

$$\int_{\partial D(x_0, \epsilon)} U(x) \cdot t(x) d\sigma_x = \int_{D(x_0, \epsilon)} \text{rot}(U(x)) \cdot n dS_x \text{ et donc}$$

$$\text{rot}(U(x_0)) \cdot n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{\partial D(x_0, \epsilon)} U(x) \cdot t(x) d\sigma_x . \quad \parallel$$

La composante, dans la direction  $n$ , du rotationnel de  $U$ , en  $x_0$ , est le taux de particules (par unité de surface) qui tournent autour de  $x_0$  par rapport à l'axe de rotation  $n$ .



Si  $\text{rot}(U) = 0$  on dit que  $U$  est un champ *irrotationnel*.

**Remarque :** Si  $u$  est un champ scalaire sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  on a

$$\nabla u(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_d \epsilon^d} \int_{S^{d-1}(x_0, \epsilon)} u(x) n(x) dS_x . \quad \parallel$$

**Notations :**

Si l'on écrit  $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$  on a les relations formelles :

$$\nabla u = u \vec{\nabla} \quad \operatorname{div}(U) = \vec{\nabla} \cdot U \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(U) = \vec{\nabla} \wedge U .$$

Des notions utiles pour écrire des systèmes d'équations aux dérivées partielles sont le *Laplacien du champ de vecteurs*  $U$  qui est défini par

$$\Delta U = \nabla \left( \operatorname{div}(U) \right) - \operatorname{rot} \left( \operatorname{rot}(U) \right) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) U = \begin{pmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \end{pmatrix} ;$$

et le *gradient du champ de vecteurs*  $U$  dans la direction  $v$  qui est défini par

$$(v \nabla) U(x_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U(x_0 + \epsilon v) - U(x_0)}{\epsilon} = \begin{pmatrix} v \cdot \nabla U_1(x_0) \\ v \cdot \nabla U_2(x_0) \\ v \cdot \nabla U_3(x_0) \end{pmatrix} = (v \cdot \vec{\nabla}) U(x_0) = \operatorname{DU}(x_0) v .$$