Optimisation algorithmique - Examen du 10 janvier 2019 - durée 2h

Exercice 1. On considère la fonction suivante de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x_1 - x_2 + 2)^2 + x_2^2 e^{x_1}.$$

1. *question préliminaire.* Montrer que l'équation $t+4+2e^t = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, qu'on notera γ (on ne cherchera pas à calculer sa valeur).

2. Calculer le gradient de f, trouver ses points critiques et montrer que f admet un unique minimiseur global.

Exercice 2. On considère la fonction suivante de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-2} (x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2,$$

où $y \in \mathbb{R}^n$ est fixé.

1. Identifier la matrice A, le vecteur b et le réel c tels que f s'écrive sous la forme standard d'une fonctionnelle quadratique :

   $$f(x) = \frac{1}{2} \langle\, Ax \,,\, x \,\rangle - \langle\, b \,,\, x \,\rangle + c,$$

   où $\langle\, \cdot \,,\, \cdot \,\rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que A est une matrice symétrique définie positive.

3. En déduire que f est une fonction fortement convexe et qu'elle admet un minimiseur unique x^*, et écrire le système d'équations linéaires vérifié par x^*.

4. Écrire une fonction Octave ou Matlab `function xstar = minim_f(y)` renvoyant la solution x^* en fonction du vecteur y donné en entrée.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + e^{x_1}.$$

1. Montrer que f est fortement convexe, de constante m à déterminer.

2. Décrire de manière générale l'algorithme de descente de gradient avec méthode de rebroussement pour la minimisation d'une fonction.

3. Écrire une fonction Matlab ou Octave `function xstar = grad_desc(xinit,alpha,beta,eps)` réalisant la descente de gradient avec méthode de rebroussement pour la minimisation de la fonction f, avec initialisation x_{init}, constantes α et β pour la méthode de rebroussement, et condition d'arrêt ϵ sur la norme du gradient.

4. Rappeler les conditions de convergence de l'algorithme précédent. Sont-elles satisfaites ici ?

5. Montrer que l'on peut trouver une constante $R > 0$ en fonction de x_{init} telle que la suite des itérés x^k de l'algorithme de descente soit telle que $\|x^k\| < R$ pour tout $k \geq 0$. En déduire que les conditions de convergence sont satisfaites en considérant la fonction f restreinte à la boule ouverte $B(0, R)$.

6. Décrire de manière générale l'algorithme de Newton pour la minimisation d'une fonction. Écrire explicitement l'étape de mise à jour $x^k \mapsto x^{k+1}$ dans le cas de la fonction f.