Optimisation algorithmique - Examen partiel du 12 novembre 2018 - durée 1h15

Exercice 1.

1. Rappeler l'expression générale du développement de Taylor-Young à l'ordre 2 d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable.

2. Écrire ce développement pour la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x_1 - x_2)^4$, au point $x = (1, 0)$.

Exercice 2. Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

Exercice 3. Soit $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$ fixés. On définit la fonction suivante de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:

$$J(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2,$$

1. Calculer l'expression de la dérivée directionnelle $DJ(x).h$ de J au point x et dans la direction h.

2. Écrire une fonction `function G = GradJ(x,y,lambda)` qui calcule $G = \nabla J(x)$, gradient de la fonction J au point x. Le vecteur G en sortie doit être de même taille que x.

3. Montrer que $J(x)$ peut s'écrire sous la forme $J(x) = \|x - y\|^2 + \lambda \|Ax\|^2$, où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne et A est une matrice de taille $(n - 1) \times n$ à déterminer. En déduire que l'équation $\nabla J(x) = 0$ est un système linéaire qui peut donc s'écrire sous forme matricielle $Mx = b$, pour une certaine matrice M et un vecteur b à déterminer.

4. Montrer que J admet un minimiseur unique égal à la solution de $Mx = b$.

5. Écrire une fonction Matlab/Octave `function x = MinimJ(y,lambda)` qui permet de calculer le minimiseur de la fonction J en résolvant le système linéaire $Mx = b$.