# Optimisation algorithmique - Examen partiel du 12 novembre 2018 - durée 1h15

**Exercice 1.**

1. Rappeler l'expression générale du développement de Taylor-Young à l'ordre 2 d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable.

**Correction**

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x) \ , \ h \rangle + \frac{1}{2} \langle \ h \ , \ Hf(x)h \ \rangle + o(\|h\|^2).$$

2. Écrire ce développement pour la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x_1 - x_2)^4$, au point $x = (1, 0)$.

**Correction.** On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x_1 - x_2)^4 \quad \Rightarrow \quad f(1,0) = 1, \\ \nabla f(x) & = & (4(x_1 - x_2)^3, 4(x_2 - x_1)^3) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1,0) = (4, -4) \quad \Rightarrow \quad \langle \nabla f(1,0) \ , \ h \rangle = 4(h_1 - h_2), \\ Hf(x) & = & \begin{pmatrix} 12(x_1 - x_2)^2 & -12(x_2 - x_1)^2 \\ -12(x_2 - x_1)^2 & 12(x_1 - x_2)^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix} \\ & & \Rightarrow \quad \langle \ h \ , \ Hf(1,0)h \ \rangle = \langle \ (h_1, h_2) \ , \ 12(h_1 - h_2, -h_1 + h_2) \ \rangle = 12(h_1(h_1 - h_2) - h_2(h_1 - h_2)) \end{array}$$

Ainsi le développement de $f$ en $x = (1, 0)$ s'écrit

$$f((1,0) + h) = 1 + 4(h_1 - h_2) + 6(h_1 - h_2)^2 + o(\|h\|^2).$$

**Exercice 2.** Déterminer les extrema locaux et globaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

**Correction** On peut tout de suite dire que $f$ n'admet aucun extremum global car $f(x, 0) = x^3 + 27$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

Pour ce qui est des extrema locaux, déterminons d'abord les points critiques de $f$ :

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 9y, 3y^2 - 9x)$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y) = 0 & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3y = 0 \\ y^2 - 3x = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} y = x^2/3 \\ x^4/9 - 3x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x^2/3 \\ x = 0 \text{ ou } x^3 = 27 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3 \end{array} \right. \end{array}$$

Les points critiques de $f$ sont donc $(x, y) = (0, 0)$ et $(x, y) = (3, 3)$.

La matrice hessienne de $f$ s'écrit

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}$$

Pour $(x, y) = (0, 0)$ on a donc

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

En notant $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ses valeurs propres, on a $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 \lambda_2 = -81 < 0$ donc cette matrice a une valeur propre strictement positive et une autre strictement négative. Ainsi $(0, 0$ est une point selle de $f$.

A présent pour Pour $(x, y) = (3, 3)$ on a

$$Hf(3, 3) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$$

Ici $\lambda_1 + \lambda_2 = 36 > 0$ et $\lambda_1 \lambda_2 = 18^2 - 81 > 0$ donc les deux valeurs propres sont strictement positives. Ainsi $(3, 3)$ est un minimiseur local de $f$.

Ainsi $f$ a un minimum local en $(3, 3)$ et pas de maximum local.

**Exercice 3.** Soit $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$ fixés. On définit la fonction suivante de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ :

$$J(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2,$$

1. Calculer l'expression de la dérivée directionnelle $DJ(x).h$ de $J$ au point $x$ et dans la direction $h$.

**Correction.**

$$DJ(x).h = \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - y_i)h_i + \lambda \sum_{i=1}^{n-1} 2(x_{i+1} - x_i)(h_{i+1} - h_i).$$

2. Écrire une fonction `function G = GradJ(x,y,lambda)` qui calcule $G = \nabla J(x)$, gradient de la fonction $J$ au point $x$. Le vecteur $G$ en sortie doit être de même taille que $x$.

**Correction.**

```
function G = GradJ(x,y,lambda)
    G = zeros(size(x));
    n = length(x);
    for i=1:n
        G(i) = 2*(x(i)-y(i));
    end
    for i=1:n-1
        c = 2*(x(i+1)-x(i));
```

```
        G(i+1) = G(i+1) + c;
        G(i) = G(i) - c;
    end
end
```

3. Montrer que $J(x)$ peut s'écrire sous la forme $J(x) = \|x-y\|^2 + \lambda\|Ax\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et $A$ est une matrice de taille $(n-1)\times n$ à déterminer. En déduire que l'équation $\nabla J(x) = 0$ est un système linéaire qui peut donc s'écrire sous forme matricielle $Mx = b$, pour une certaine matrice $M$ et un vecteur $b$ à déterminer.

**Correction.** Le premier terme de $J$ est clairement égal au carré de la norme de $x-y$. Le deuxième terme est le carré de la norme du vecteur $u = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Ce vecteur s'obtient bien à partir de $x$ par une opération linéaire. On a en fait

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ \vdots \\ x_n - x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ce qui donne la matrice $A$ (de taille $(n-1)*n$). On a donc $J(x) = \|x-y\|^2 + \lambda\|Ax\|^2$ et donc

$$DJ(x).h = 2\langle\, x-y\ ,\ h\,\rangle + 2\lambda\langle\, Ax\ ,\ Ah\,\rangle = \left\langle\, 2(x-y) + 2\lambda A^T Ax\ ,\ h\,\right\rangle$$

d'où $\nabla J(x) = 2(x-y) + 2\lambda A^T Ax$. L'équation $\nabla J(x) = 0$ s'écrit donc

$$2(x-y) + 2\lambda A^T Ax = 0 \quad \Leftrightarrow (I_n + \lambda A^T A)x = y.$$

On obtient donc bien un système linéaire $Mx = b$ avec $M = I_n + \lambda A^T A$ et $b = y$.

4. Montrer que $J$ admet un minimiseur unique égal à la solution de $Mx = b$.

**Correction.** $\nabla J(x) = 2(x-y) + 2\lambda A^T Ax$ donc $HJ(x) = 2I_n + 2\lambda A^T A = 2M$. On va montrer que $M$ est une matrice symétrique positive. D'abord $M$ est clairement symétrique ; ensuite pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle\, Mh\ ,\ h\,\rangle = \langle\, h\ ,\ h\,\rangle + \lambda\left\langle\, A^T Ah\ ,\ h\,\right\rangle = \|h\|^2 + \lambda\langle\, Ah\ ,\ Ah\,\rangle = \|h\|^2 + \lambda\|Ah\|^2.$$

Par conséquent, premièrement $\langle\, Mh\ ,\ h\,\rangle \geq 0$ pour tout $h$, et donc $HJ(x)$ est un matrice positive pour tout $x$, et donc $J$ est une fonction convexe. On sait alors que tout point crritique de $J$ est un minimiseur global de $J$. D'autre part, si on revient à l'expression de $\langle\, Mh\ ,\ h\,\rangle$ précédente, on a $\langle\, Mh\ ,\ h\,\rangle \geq \|h\|^2 > 0$ dès que $h \neq 0$, et donc $M$ est définie positive. En particulier $M$ est une matrice inversible, et donc l'équation $Mx = b$ admet une solution unique. Ainsi $J$ admet un point critique unique et donc aussi un minimiseur unique égal à la solution de cette équation.

5. Écrire une fonction Matlab/Octave `function x = MinimJ(y,lambda)` qui permet de calculer le minimiseur de la fonction $J$ en résolvant le système linéaire $Mx = b$.

**Correction.**

```
function x = MinimJ(y,lambda)
    A = zeros(n-1,n);
    for i=1:n-1
        A(i,i) = -1;
        A(i,i+1) = 1;
    end
    M = eye(n)+lambda*A'*A;
    x = M\y;
end
```