Optimisation algorithmique
Examen final du 10 janvier 2020 - durée 2h

Exercice 1. On considère la fonction suivante de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Déterminer le type de chaque point critique (minimiseur local, maximiseur local ou point selle).
3. Quels sont les extrema globaux de f ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. On considère une itération d'un algorithme de descente pour la minimisation de la fonction f, consistant, à partir d'une position courante $x \in \mathbb{R}^n$, à choisir une direction de descente $d \in \mathbb{R}^n$, un pas de descente $t > 0$, et à calculer la position à l'itération suivante $x + td$.

1. Rappeler l'expression de la direction d dans le cas de la méthode de Newton.
2. Toujours pour la méthode de Newton, montrer que si f est fortement convexe, alors la direction d est bien définie, et qu'il s'agit bien d'une direction de descente, c'est-à-dire que si t est suffisamment petit, alors $f(x + td) < f(x)$.

Exercice 3. Soient k, n deux entiers supérieurs ou égaux à 1, A une matrice réelle de taille (k, n), et $b \in \mathbb{R}^k$. Le problème des moindres carrés linéaire consiste à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \|Ax - b\|^2,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^k$.

1. Donner les expressions du gradient et de la matrice hessienne de f.
2. On note $F = Im(A) = \{Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$. En considérant la décomposition du vecteur b suivant F et $F^\perp$ (sous-espace orthogonal), montrer que f admet au moins un point critique.
3. Montrer que f est convexe. En déduire que f admet au moins un minimiseur.

Application. On cherche à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \int_0^1 (t^3 - x_1 t - x_2)^2 dt.$$

4. Montrer qu'il s'agit d'un problème des moindres carrés (on explicitera la matrice A et le vecteur b)

5. Résoudre ce problème.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ un entier, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable, A une matrice carrée de taille n, et $y \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé. On définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = u(Ax) + \|x - y\|^2,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

1. Donner l'expression de $\nabla f(x)$, gradient de f en un point x, en fonction de A, x, y, et ∇u.

2. Écrire une fonction Python `descente_gradient(u,grad_u,A,y,eta,eps)` qui applique la méthode de descente de gradient sur la fonction f avec pas constant $\eta > 0$ et critère d'arrêt $\|\nabla f(x)\| < \varepsilon$, et renvoie l'approximation du minimiseur de f obtenue. Ici les arguments d'entrée `u, grad_u` sont des fonctions Python supposées déjà codées calculant u et ∇u, et `y` est un vecteur NumPy.

3. Donner l'expression de $Hf(x)$, matrice hessienne de f en un point x, en fonction de A, x, y, et Hu.

4. Écrire une fonction Python `descente_Newton(u,grad_u,hess_u,A,y,eta,eps)` qui applique la méthode de Newton sur la fonction f avec pas constant $\eta > 0$ et critère d'arrêt $\|\nabla f(x)\| < \varepsilon$. `hess_u` est une fonction Python calculant Hu.

5. Montrer que si u est convexe, alors f est fortement convexe.

6. Montrer que si de plus il existe une constante $\eta > 0$ telle que

$$\forall x, h \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle\, h \,,\, Hu(x)h \,\rangle \leq \eta \|h\|^2,$$

alors il existe deux constantes m, M avec $0 < m < M$ telles que

$$\forall x, h \in \mathbb{R}^n, \qquad m\|h\|^2 \leq \langle\, h \,,\, Hf(x)h \,\rangle \leq M\|h\|^2. \quad (*)$$

7. Que peut-on conclure de l'inégalité $(*)$ vis-à-vis de la convergence des algorithmes de descente de gradient et de l'algorithme de Newton ?

8. Montrer que l'inégalité $(*)$ est vérifiée lorsque $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + x_i^2}$.