Optimisation algorithmique - Examen partiel du 4 novembre 2019 - durée 1h30

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$.

1. Calculer le gradient de f et déterminer les points critiques de la fonction.
2. Pour chacun des points critiques, dire s'il s'agit d'un minimiseur local, d'un maximiseur local, ou d'un point selle.
3. La fonction f admet-elle un minimum global ?

Exercice 2. *Partie A (questions préliminaires).*

1. Montrer qu'une somme de fonctions convexes est convexe.
2. Montrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et constante sur un intervalle $[a, b]$, alors tout $x \in [a, b]$ minimise f.

Soit $d \geq 1$ un entier et $y \in \mathbb{R}^d$ fixé. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x - y\|$, où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne.

3. Sur quel domaine f est-elle différentiable ?
4. Montrer que f est une fonction coercive.
5. Montrer que f est convexe, mais pas strictement convexe.

Partie B. On considère à présent n points fixés $x^{(i)} \in \mathbb{R}^d$, et $J : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction

$$J(x) = \sum_{i=1}^{n} \|x - x^{(i)}\|.$$

6. Sur quel domaine la fonction J est-elle différentiable ?
7. Montrer que J est coercive et convexe.
8. Montrer que si les points $x^{(i)}$ ne sont pas tous alignés, alors la fonction J est strictement convexe. En déduire que dans ce cas la fonction J admet un minimiseur unique.
9. Dans cette question on suppose $d = 1$, que les $x^{(i)}$ sont tous distincts, et que n est pair. Montrer qu'alors la fonction J est minimisée sur un certain intervalle à déterminer.
10. On revient au cas d quelconque. Montrer que si le point x minimise J et qu'il est distinct de tous les $x^{(i)}$, alors on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x - x^{(i)}}{\|x - x^{(i)}\|} = 0. \qquad (*)$$

11. Montrer que réciproquement, si un point $x \in \mathbb{R}^d$ est distinct de tous les $x^{(i)}$ et vérifie $(*)$, alors J est minimisée en x.

12. Un algorithme classique de calcul d'une approximation du minimiseur de J consiste à effectuer les itérations suivantes :

$$y^{(k+1)} \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x^{(i)}}{\|x^{(i)} - y^{(k)}\|} \quad \Big/ \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|x^{(i)} - y^{(k)}\|}$$

en partant d'un point $y^{(0)}$ quelconque. Écrire une fonction Python `MinimiseJ(x,N)` qui effectue N itérations de cet algorithme et renvoie l'approximation du minimiseur obtenue. `x` est supposé être un tableau de taille $n \times d$ contenant les coordonnées des points $x^{(i)}$.