Master MM 1e année - 2019/2020 - Optimisation Algorithmique - TP 1

On considère les quatre fonctions suivantes sur leurs domaines de définition respectifs :

(a) Une fonctionnelle quadratique sur $[-3,3]\times[-3,3]$:
$$f_1(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy + x - 3y + 30.$$

(b) Fonction de Rosenbrock sur $[-3,3]\times[-1,4]$:
$$f_2(x,y) = 100(y-x^2)^2 + (1-x)^2.$$

(c) Fonction d'Himmelblau sur $[-5,5]\times[-5,5]$:
$$f_3(x,y) = (x^2+y-11)^2 + (x+y^2-7)^2.$$

(d) Fonction barrière logarithmique sur $]0,1[\times]0,\frac{3}{2}[$:
$$f_4(x,y) = -\log(x) - \log(y) - \log(1-x) - \log(\tfrac{3}{2}-y).$$

1. Préciser dans chaque cas si la fonction est convexe.
2. La fonction `plot_fun` effectue les opérations suivantes, connaissant une fonction f et son domaine :
   — évaluation de f sur une grille discrétisant le domaine,
   — calcul du minimiseur de la fonction sur la grille,
   — représentation du graphe de f et du minimiseur dans un repère tridimensionnel sur le domaine,
   — représentation des lignes de niveaux de f

   Exécuter les commandes suivantes pour appliquer cette fonction dans le cas (a) :

```
def f1(x,y):
    return x**2 + 2*y**2 + x*y + x - 3*y + 30
dom1 = [-3,3,-3,3]
plot_fun(f1,dom1)
```

   puis faire de même avec les 3 autres cas.

Dans la suite de cet exercice on considère uniquement la fonction f_1 du cas (a).

3. Donner la matrice symétrique A, le vecteur B et la constante c pour lesquelles
$$f_1(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy + x - 3y + 30 = \frac{1}{2}\langle AX\ ,X\rangle - \langle B\ ,X\rangle + c,$$
   où $X = (x,y)^T$.
4. Justifier que f_1 est strictement convexe.
5. Vérifier par un calcul direct des dérivées partielles que l'on a bien $\nabla f_1(X) = AX - B$.
6. Calculer le minimiseur (x^*, y^*) de f_1.
7. Définir la fonction `gradf1(x,y)` qui calcule et renvoie les deux dérivées partielles de f_1.
8. On va maintenant visualiser le champ des gradients de f_1. Regarder la fonction `plot_grad`, comprendre ce qu'elle effectue, et l'utiliser avec la fonction f_1.