

Images numériques couleur

enseignant : Joan Glaunès
Slides écrites par Julie Delon

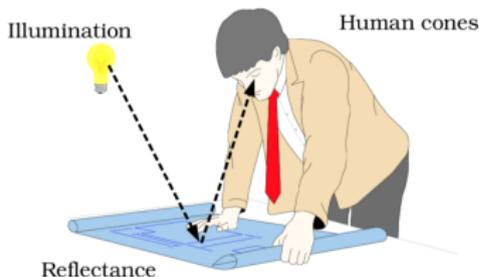
Cours de Master M2

Première partie I

Couleur et perception

Introduction

(a)



(b)

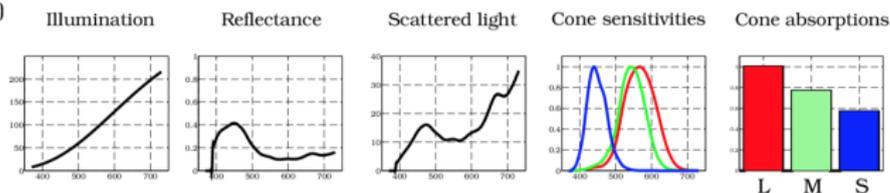


Figure 3.1: Illustration of main components in color image formation. a) Example of light interacting with reflective surface and reaching human retina. b) The plots show scattered light as a product of illumination and reflectance, and the amount of cone absorptions. Image courtesy of [Wandell 1995].

Lumière et illuminants

Spectre visible : longueurs d'ondes entre $\lambda_{min} = 380\text{nm}$ et $\lambda_{max} = 700\text{nm}$.



Illuminant monochromatique : illuminant dont la distribution spectrale est une masse de Dirac (une seule longueur d'onde).

Corps noir à la température T : Objet physique idéal dont le spectre ne dépend que de la température (bonne approximation pour les étoiles).

Distribution

$$I(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}.$$

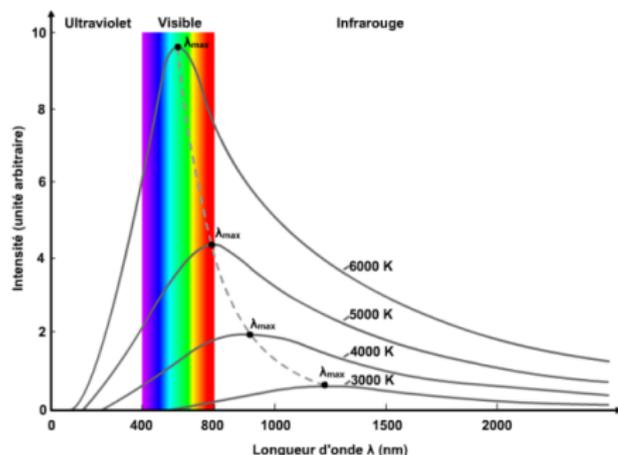


Illustration : F. Bouquet, Univ. Paris Sud

Objets

Réponse spectrale d'un objet $R(\lambda, x, \theta)$, combinaison linéaire de

- une partie lambertienne $R_l(\lambda, x)$,
- une partie spéculaire $R_i(\lambda, x, \theta)$ qui dépend de l'angle θ sous lequel on regarde le point x .

Différents modèles de formation d'image : modèle Lambertien, modèle dichromatique, modèle de Kubelka-Monk.

Pour aller plus loin, voir :

S.A. Shafer, Using color to separate reflection components, *Color. Res. Appl.* 10 (1985), no. 4, 210–218.

J. M. Geusebroek, T. Gevers, and A. W. M. Smeulders, The Kubelka-Munk theory for color image invariant properties, *European Conference on Colour in Graphics*, 2002, pp. 463–467.

Observateur

Hypothèse classique : 3 photorécepteurs de sensibilités spectrales respectives ρ_r , ρ_g et ρ_b

- Oeil des primates : 3 types de cônes (2 pour les mammifères non primates, jusqu'à 5 pour certains oiseaux)
- Capteur photographique classique : 3 filtres (rouge, vert, bleu)

Energies mesurées par les photorécepteurs

$$q_r(x) = \int I(\lambda)R(\lambda, x)\rho_r(\lambda)d\lambda.$$

$$q_g(x) = \int I(\lambda)R(\lambda, x)\rho_g(\lambda)d\lambda.$$

$$q_b(x) = \int I(\lambda)R(\lambda, x)\rho_b(\lambda)d\lambda.$$

Modèle diagonal de Von Kries

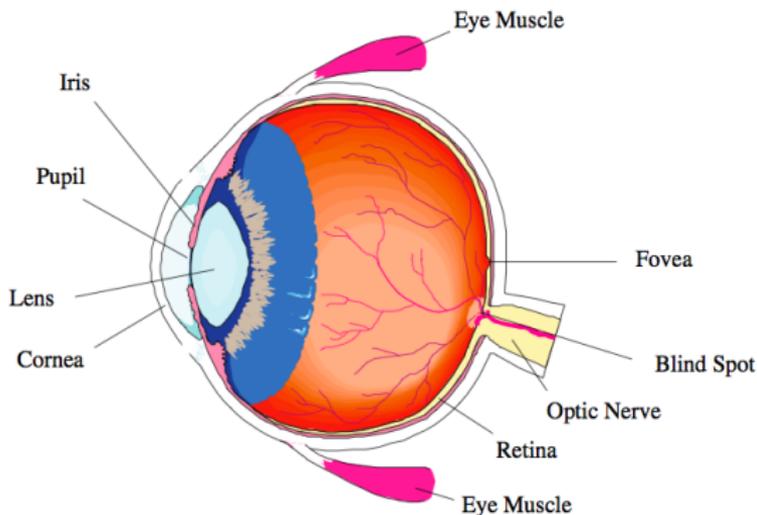
Sous hypothèse lambertienne et en supposant que les sensibilités ρ sont des Diracs (FAUX en général !), on mesure pour un point x le triplet :

$$(R(\lambda_R, x)I(\lambda_R), R(\lambda_G, x)I(\lambda_G), R(\lambda_B, x)I(\lambda_B)).$$

Sous ce modèle, passer d'un illuminant I à un illuminant L revient à multiplier ([modèle de Von Kries](#)) ce triplet par la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \frac{L(\lambda_R)}{I(\lambda_R)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L(\lambda_G)}{I(\lambda_G)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L(\lambda_B)}{I(\lambda_B)} \end{pmatrix}.$$

Système visuel humain



Fovea : zone de la rétine où la vision est la plus précise. Haute densité de photorécepteurs.

Zone aveugle au niveau du nerf optique.

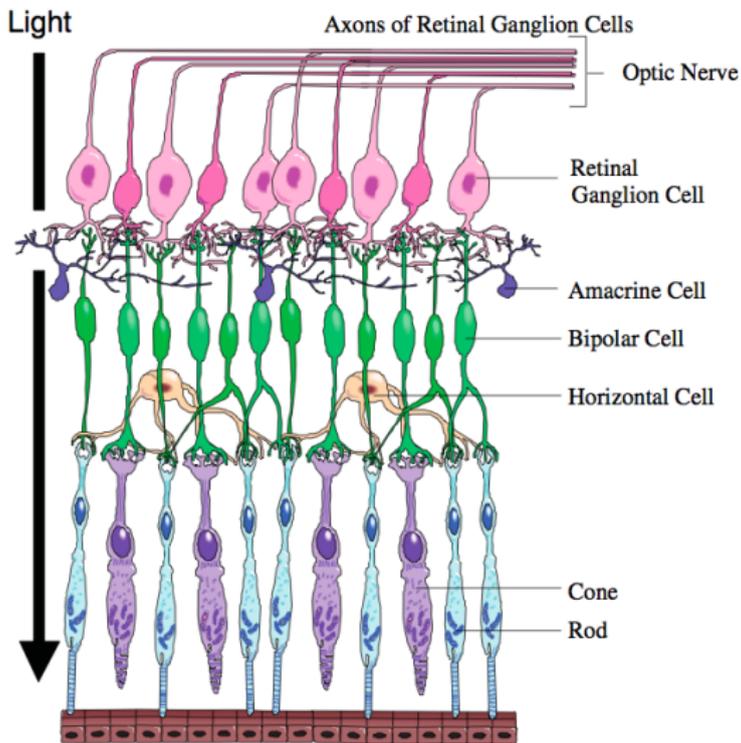
Système visuel humain

(a)



Expérience illustrant l'existence de la zone aveugle.

Cellules de la rétine

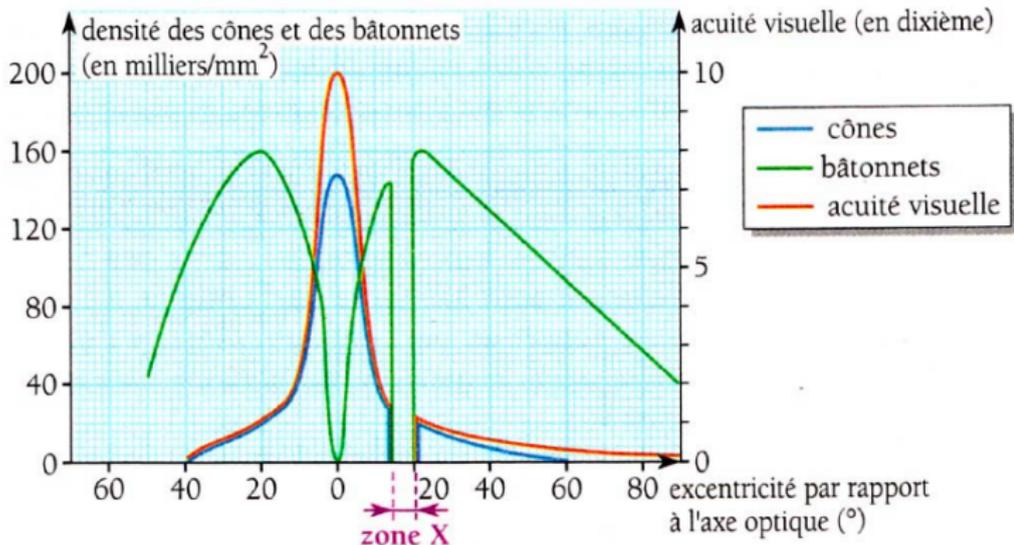
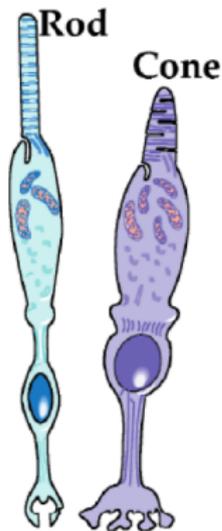


Nerf optique $\simeq 10^6$ fibres pour transporter l'information d'environ 10^8 photorecepteurs... Processus de **COMPRESSION** au niveau des cellules des couches de la rétine.

Cellules de la rétine

Photorécepteurs sur la rétine :

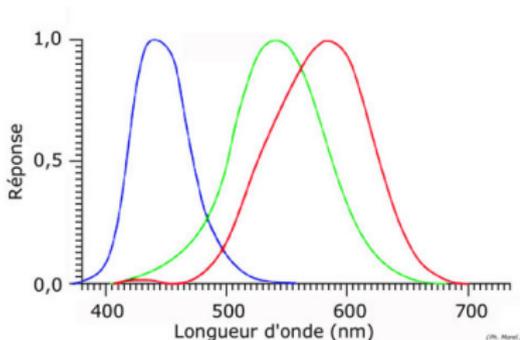
- les **bâtonnets**, très sensibles mais peu précis, liés à la vision nocturne ;
- les **cônes**, plus précis mais beaucoup moins sensibles que les bâtonnets, associés à la perception de la couleur.



Cellules de la rétine

Les cônes sont de trois types, selon leur sensibilité spectrale :

- 1 Pour les cônes de type S (pour "short", 4% des cônes), le maximum de cette sensibilité se situe dans les teintes **bleues-violettes** (440 nm).
- 2 Pour les cônes de type M (pour "medium", 32% des cônes), dans les teintes **vertes** (545 nm).
- 3 Pour les cônes de type L (pour "long", 64% des cônes), dans les teintes **jaunes-rouges** (580 nm).



Sensibilités des cônes M et L supérieure à celle des cônes S : l'oeil répond plus fortement à certaines longueurs d'onde qu'à d'autres, à intensité lumineuse égale. De plus, les cônes S sont distribués sur la périphérie de la fovea.

Sensibilité spectrale de l'oeil normalisée $V(\lambda)$ maximale en $\lambda \simeq 555\text{nm}$ en vision diurne et 500nm en vision nocturne.

Espace des spectres lumineux infini, mais espace des couleurs perçues tridimensionnel.

Si ρ_s , ρ_m et ρ_l sont les sensibilités spectrales respectives des cônes S, M et L, un spectre $I(\lambda)$ est perçu comme le triplet :

$$(\langle I, \rho_s \rangle, \langle I, \rho_m \rangle, \langle I, \rho_l \rangle),$$

où

$$\langle I, \rho_c \rangle := \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \rho_c(\lambda) I(\lambda) d\lambda.$$

Remarque : un stimulus du spectre visuel, même monochromatique (constitué d'une seule longueur d'onde) produira toujours au moins deux réponses non nulles des cônes. On ne peut donc pas stimuler les cônes séparément (et donc atteindre les triplets élémentaires $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$).

Métamérisme

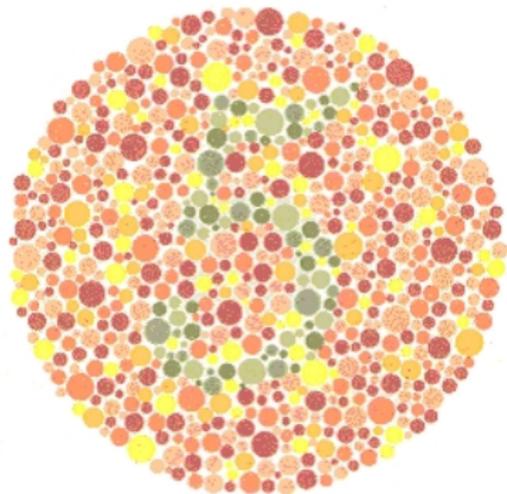
Deux objets de spectres R_1 et R_2 différents apparaissent comme identiques sous un illuminant de distribution I s'ils présentent les mêmes réponses spectrales, c-a-d si :

$$\langle I.R_1, \rho_c \rangle = \langle I.R_2, \rho_c \rangle, \quad \forall c \in \{s, m, l\}.$$

Attention, deux objets peuvent être métamères sous un illuminant donné et pas sous un autre !

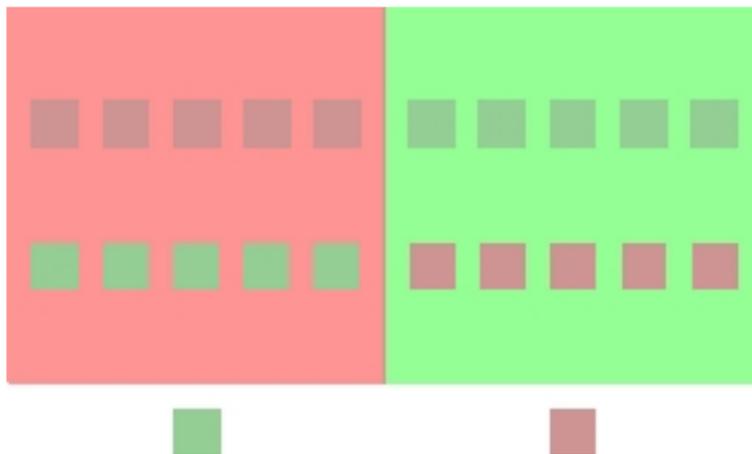
Daltonisme

Il existe différents types d'anomalies visuelles liées à la vision des couleurs. Selon les pigments atteints, on parlera d'achromatisme, de dichromatisme, ou de trichromatisme anormal.



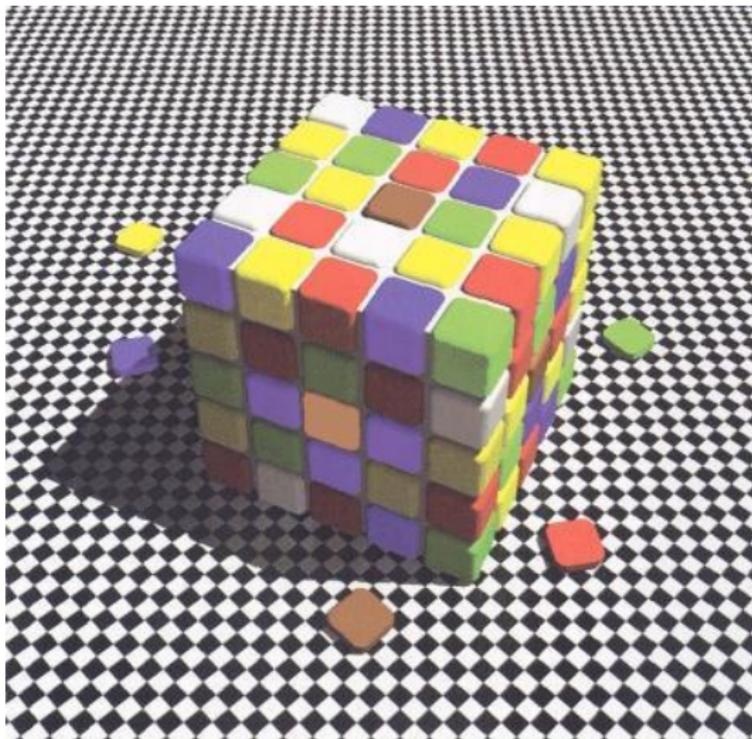
Quelques principes élémentaires de la perception couleur

Sensibilité au contraste local.



Quelques principes élémentaires de la perception couleur

Sensibilité au contraste local.



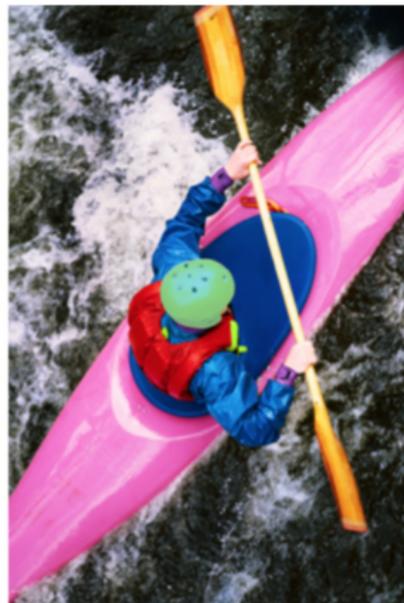
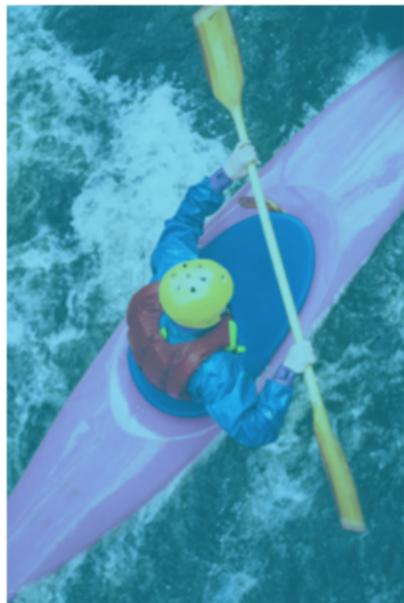
Opposition de couleur

Oppositions rouge / vert et bleu / jaune.

Découvertes par Ewald Hering (1834–1918). Confirmées dans les années 50/60 par la découverte de cellules sensibles aux opposition de couleur dans la rétine et dans le cortex.



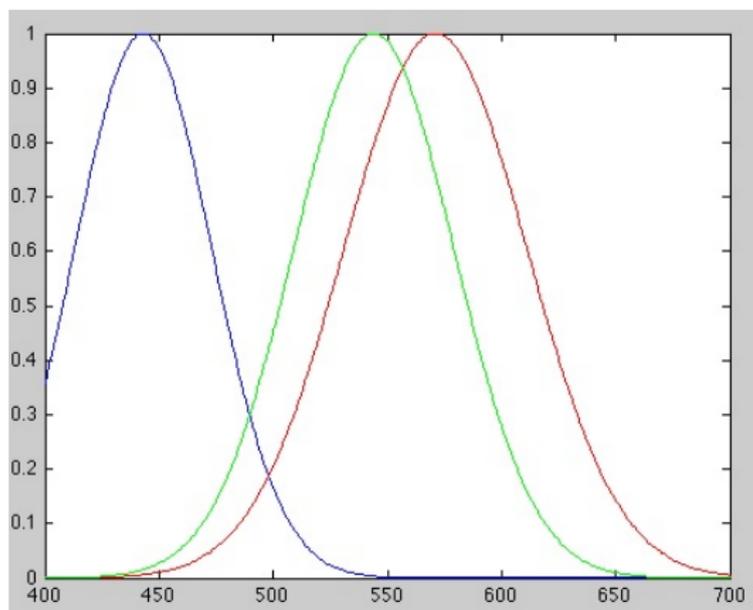
Adaptation chromatique



Deuxième partie II

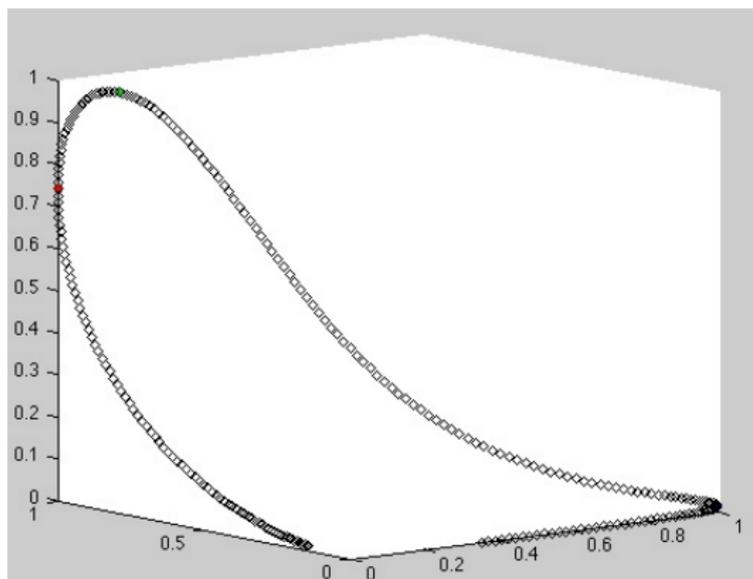
Espaces de représentation des couleurs perçues

Espace des couleurs perçues



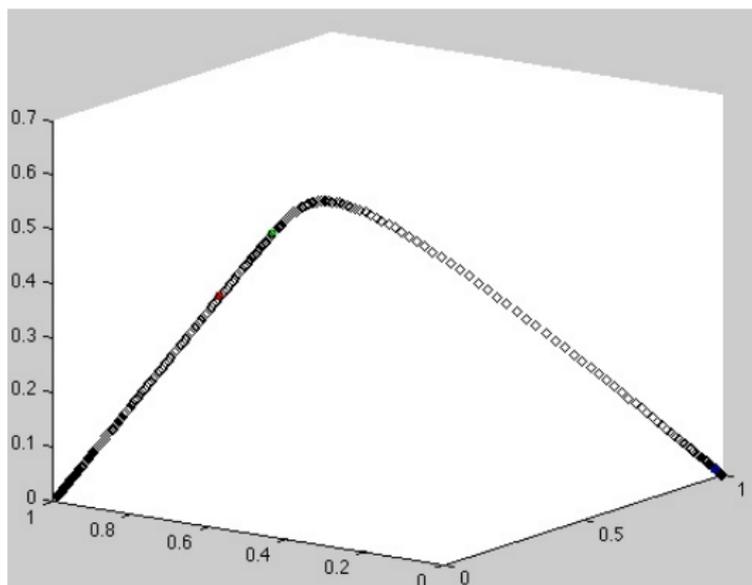
Simulation matlab : les réponses (ρ_s, ρ_m, ρ_l) des cônes sont simulées comme 3 gaussiennes.

Espace des couleurs perçues



Simulation matlab : courbe de l'ensemble des couleurs monochromatiques (triplets $\langle I, \rho_s \rangle$, $\langle I, \rho_m \rangle$, $\langle I, \rho_l \rangle$ lorsque I parcourt les signaux monochromatiques). Les couleurs visibles sont représentées par l'intérieur du cône de sommet $(0;0;0)$ et engendré par cette courbe.

Espace des couleurs perçues



Simulation matlab : intersection du cône des couleurs visibles avec le plan $x + y + z = 1$.

Représentation des couleurs perçues et synthèse additive

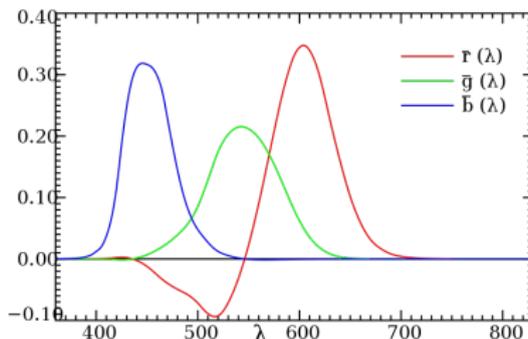
Les réponses des cônes n'ont été obtenues précisément qu'en 1999...

Représentation des couleurs perçues et synthèse additive

Système CIE RGB 1931

Expériences de **Wright et Guild** dans les années 20 : cherchent à reproduire à l'aide de 3 sources primaires B (435nm), G (546nm) et R (700nm) la même sensation de couleur qu'un stimulus monochromatique (principe de **synthèse additive**).

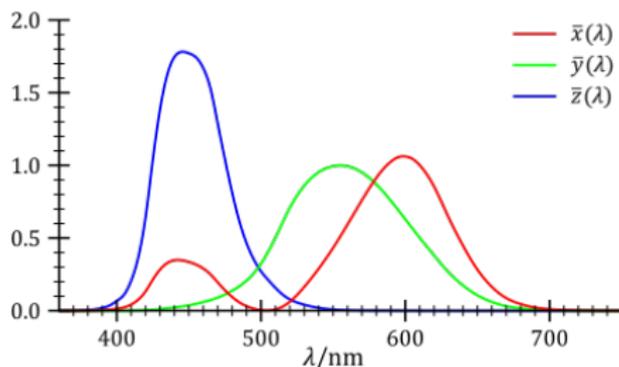
- $S(\lambda) \leftrightarrow \bar{r}(\lambda)R + \bar{g}(\lambda)G + \bar{b}(\lambda)B$,
- combinaison positive pas possible pour toute source monochromatique \rightarrow coordonnées négatives nécessaires.



Wikimedia commons.

Système XYZ CIE 1931 puis 1964

Pour pallier ce défaut, en 1931, la CIE développe un nouvel espace de primaires X, Y, Z (composante Y définie de manière à ce que la courbe $y(\lambda)$ corresponde à la sensibilité spectrale de l'oeil en vision diurne.)



Wikimedia commons.

Diagramme de chromaticité xy

Espace des couleurs XYZ normalisé : $x = \frac{X}{X+Y+Z}$, $y = \frac{Y}{X+Y+Z}$.
Représente l'ensemble des chromaticités visibles par les humains.

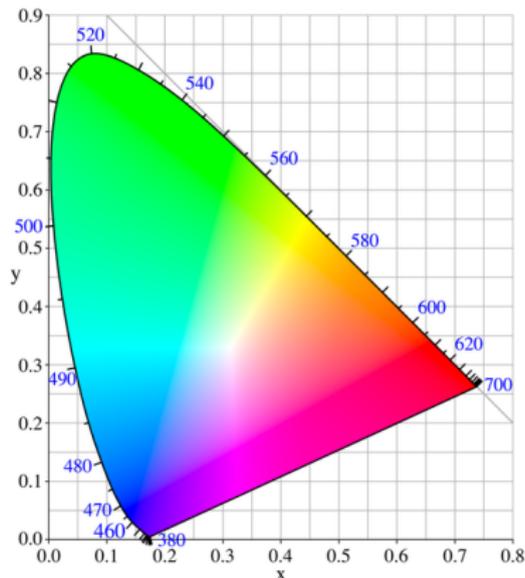


Illustration : Wikimedia Commons

Remarque : l'ensemble des couleurs du visible (pour les humains) ne peut pas être atteint en mélangeant trois sources !

Blanc

Pas de bonne définition de la lumière blanche : distribution spectrale uniforme ? en longueur d'onde ? en fréquence ?

Humains : phénomène d'adaptation chromatique à l'illuminant, sorte de balance des blancs automatique (faux si le changement n'a lieu que sur une zone limitée de la scène).

Différentes définitions de la lumière blanche standardisée :

- D65 (CIE Standard Illuminant), censé correspondre à la lumière naturelle (du ciel) en plein jour en Europe (en moyenne sur les différents jours de l'année) ;
- D50, très utilisé en imprimerie, etc.

Tous ces blancs "standards" sont extrêmement proches de la courbe de Planck (corps noir) dans le diagramme de chromaticité xy.

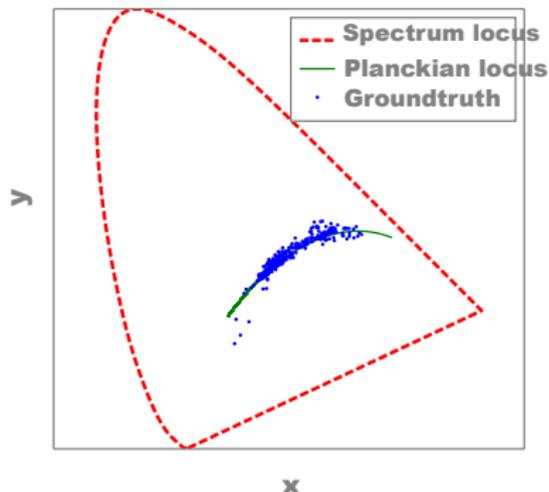
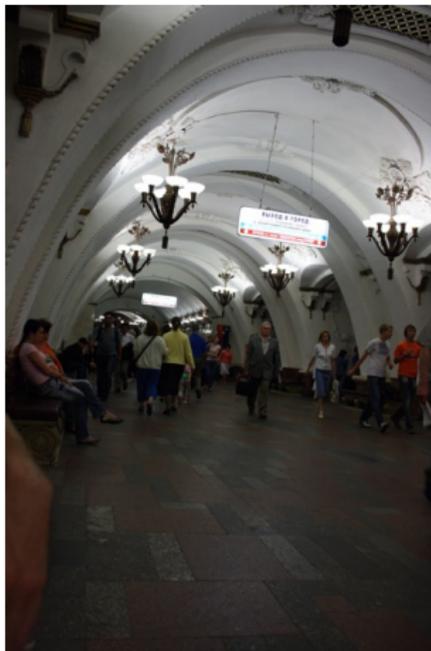
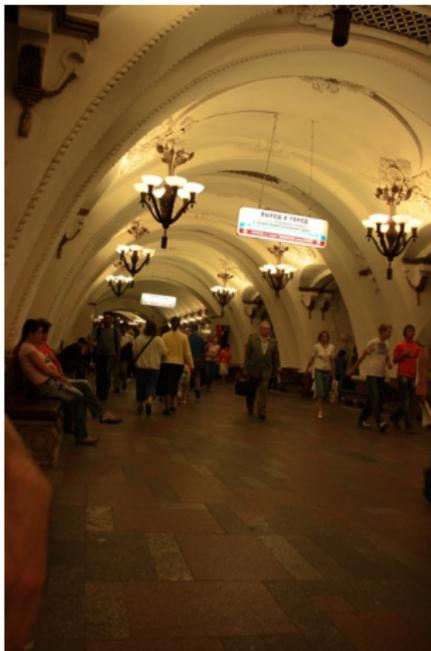


Illustration : Baptiste Mazin.

Balance des Blancs



Balance des blancs : consiste à estimer l'illuminant de la scène et à corriger l'image grâce au modèle diagonal pour en obtenir une représentation sous un illuminant standard.

→ Problème mal posé. Nécessité de faire des hypothèses sur la scène :

- **White patch**, max-RGB : point le plus clair = illuminant ;
- **Gray world** : scène achromatique en moyenne.

Stabilisation tonale

O. Frigo, J. Delon, N. Sabater, P. Hellier, Motion Driven Tonal Stabilization, IEEE Transactions in Image Processing, 2016.

Teinte et saturation

On se fixe un point blanc dans le diagramme de chromaticité.

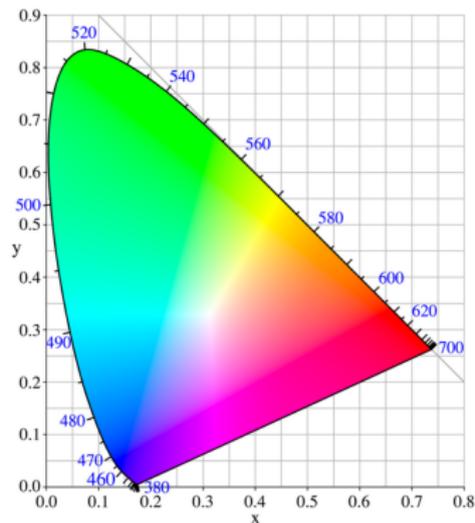


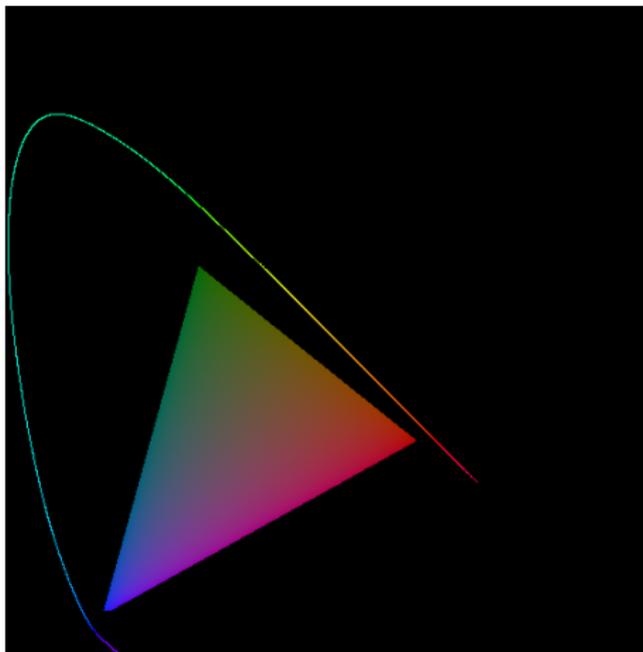
Illustration : Wikimedia Commons

Teinte = dans le diagramme de chromaticité, segment partant du point blanc et rejoignant une couleur monochromatique, ou une couleur "pourpre" (mélange de violet et de rouge).

Saturation = "distance" au point blanc dans le diagramme. Les couleurs les plus éloignées sont les plus saturées.

Restitution des couleurs par un écran : synthèse additive et gamut

Aucun écran ne peut reproduire toutes les couleurs du spectre visible (limites en saturation et en luminosité).



Standards de couleur : sRGB, (le plus utilisé, pour les moniteurs, imprimantes, internet), Adobe RGB, etc.

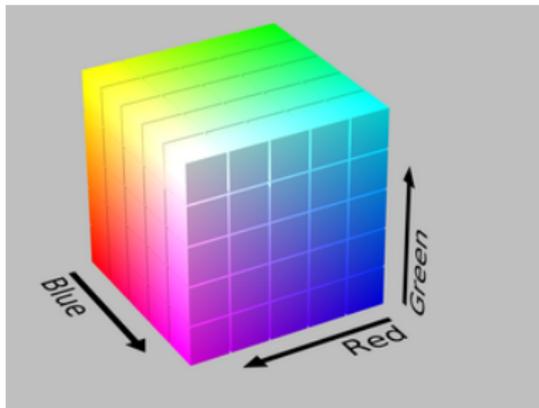
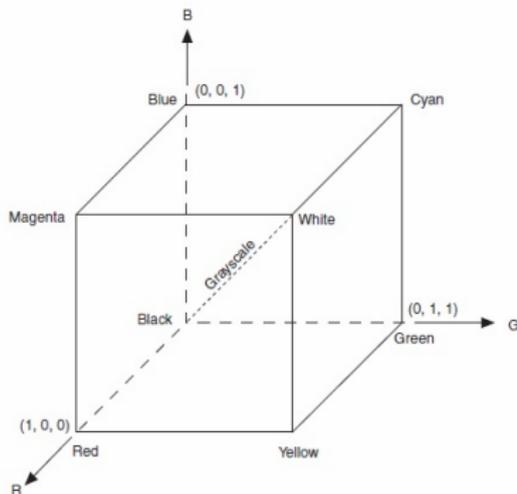
Source : <http://www.madore.org/~david/misc/color/>

Troisième partie III

Espaces couleur classiques

Cube R,G,B

Une fois qu'on s'est donné **trois primaires R, G et B** (par exemple, celles de sRGB) et un **point blanc**, le cube RGB représente l'ensemble des couleurs que l'on peut atteindre par mélange de ces primaires.



Décomposition RGB

Image couleur.



Décomposition RGB

Composante R.



Observation : les trois composantes R, G, B sont très corrélées.

Décomposition RGB

Composante G.



Observation : les trois composantes R, G, B sont très corrélées.

Décomposition RGB

Composante B.

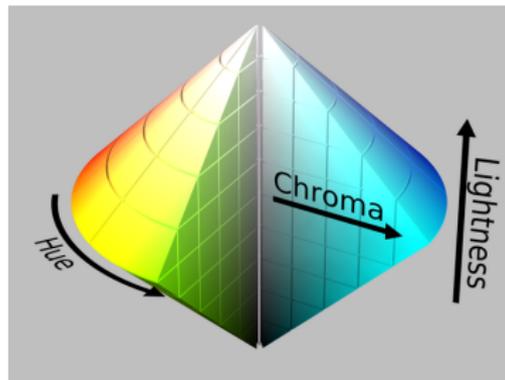


Observation : les trois composantes R, G, B sont très corrélées.

Espaces HSV, HSL, HSI

Espaces de représentation classiques en traitement des images, *computer graphics* etc.

Représentation **cylindrique** ou conique à partir du cube RGB.



- **Luminance L ou valeur V** : aspect clair, foncé ou terne d'un couleur.
- **Teinte H** : attribut de la sensation visuelle qui a suscité les dénominations de couleur.
- **Saturation S** : degré de mélange de la longueur d'onde pure prédominante avec le blanc.

Décomposition HSV d'une image

Image couleur.



Décomposition HSV d'une image

Composante V.



Décomposition HSV d'une image

Composante S.



Décomposition HSV d'une image

Composante H.



Décomposition HSV d'une image

Même image avec forte compression JPEG.



Décomposition HSV d'une image

Composante V.



Décomposition HSV d'une image

Composante S.



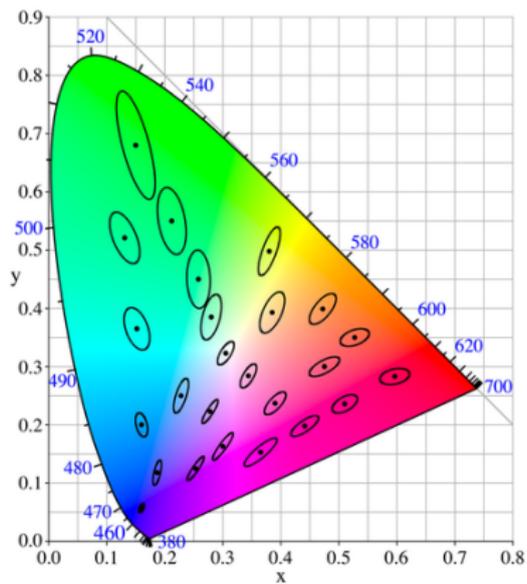
Décomposition HSV d'une image

Composante H.



Non uniformité de la perception aux écarts de couleur dans l'espace XYZ

Expériences dans les années 40 : ellipses de Macadam.



Espace CIE Lab (1976)

hors programme

Nombreux travaux de recherche pour établir un espace de couleur **perceptuellement uniforme**, dans lequel les distances entre couleurs proches correspondraient bien à la perception de l'écart entre ces couleurs.

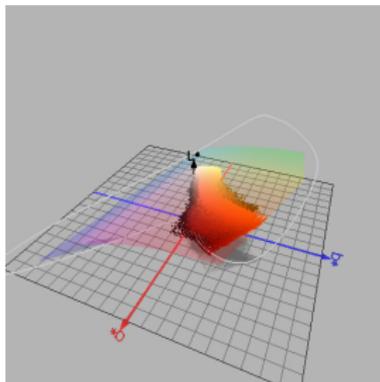
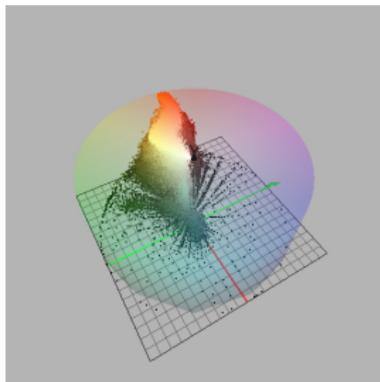
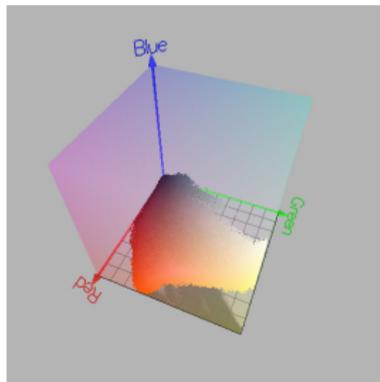
- La coordonnée L représente **la luminance**, elle correspond à l'axe des niveaux de gris.
- Les coordonnées a, b **représentent la chrominance**, i.e. les plans définis par les axes a, b sont à luminance constante, ils sont construits sur deux oppositions de couleurs : le rouge et le vert, le bleu et le jaune.

Mesure de différence de couleur :

$$\Delta E = \sqrt{\Delta L^2 + \Delta a^2 + \Delta b^2}.$$

Histogrammes couleurs dans différents espaces

hors programme

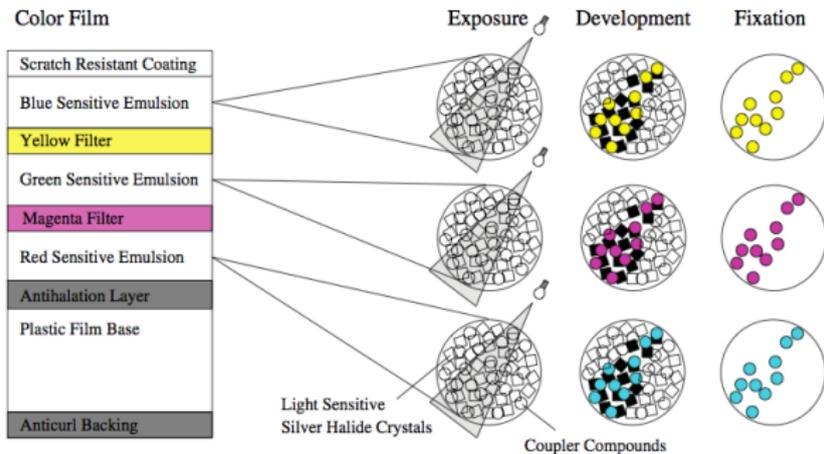


Quatrième partie IV

Capteurs couleur et Détramage

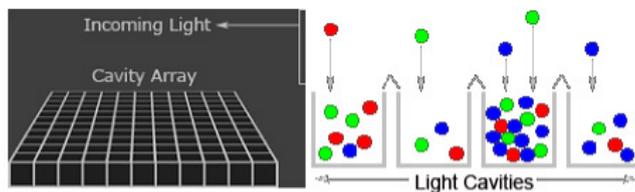
Films argentiques

hors programme



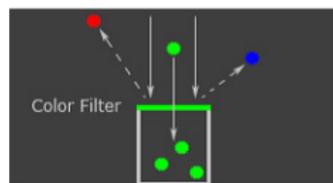
source : Ebner, *Color Constancy*.

Trame de Bayer



courtesy of cambridgeincolour.com

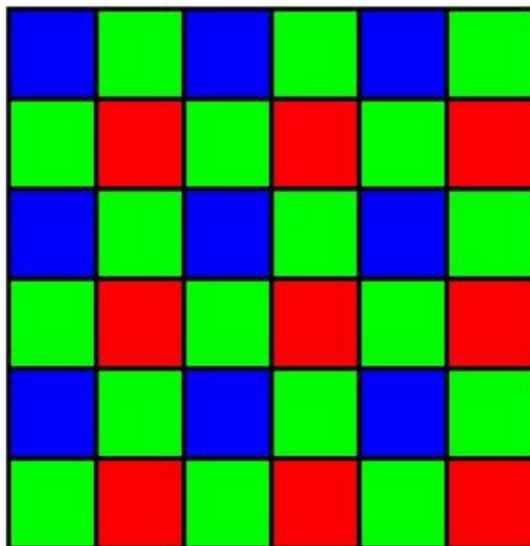
Color Filter Array



Capteurs couleur

hors programme

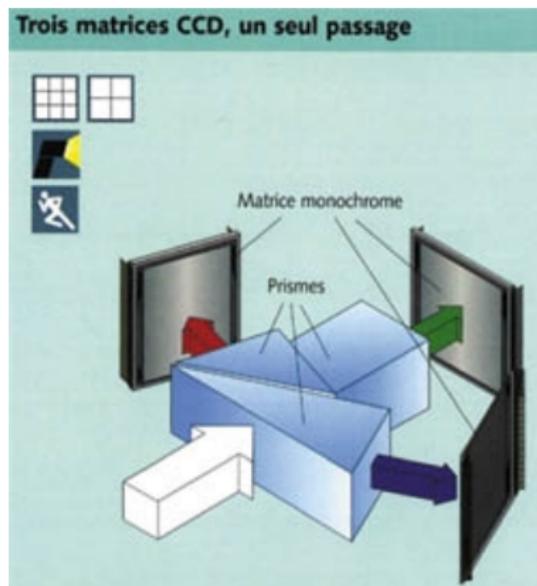
Capteur CCD : trame de Bayer ou Bayer color filter array (CFA), 1976.



Capteurs couleur

hors programme

Capteur Tri-CCD

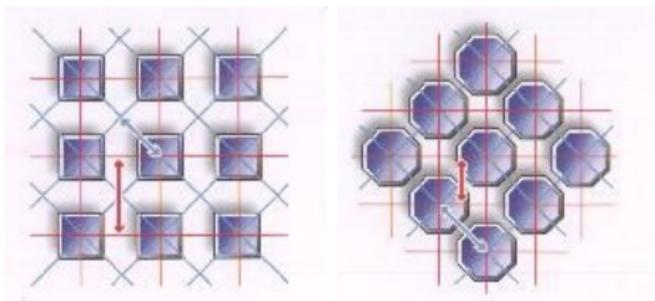


Source : www710.univ-lyon1.fr/~fdenis/club_EEA/cours/

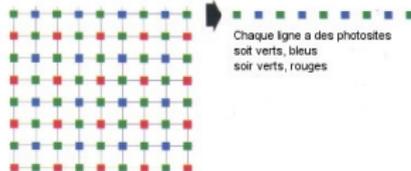
Capteurs couleur

hors programme

Capteur Super-CCD (Fuji)

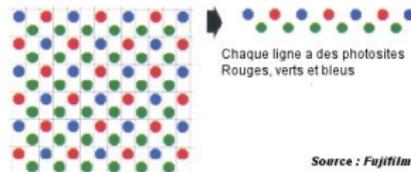


Conventional CCD



Chaque ligne a des photosites
soit verts, bleus
soit verts, rouges

Super CCD



Chaque ligne a des photosites
Rouges, verts et bleus

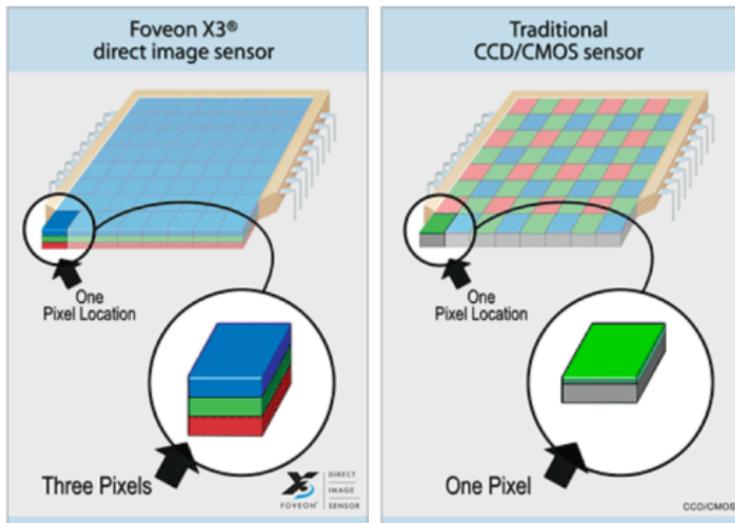
Source : Fujifilm

Source : www710.univ-lyon1.fr/~fdenis/club_EEA/cours/

Capteurs couleur

hors programme

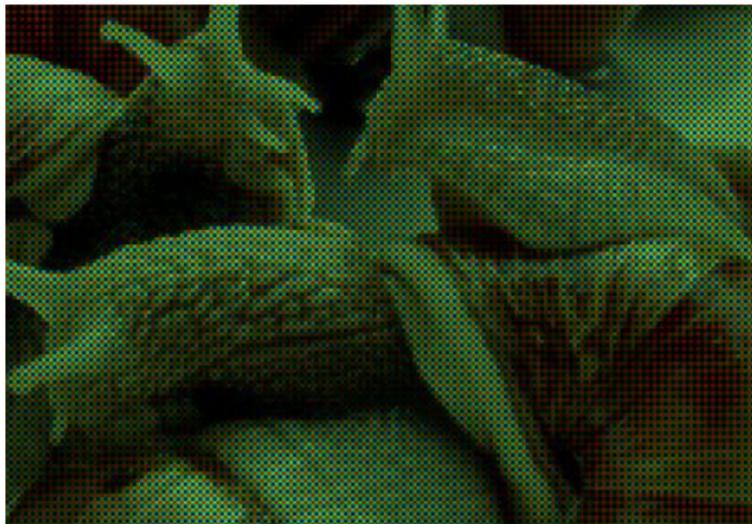
Capteur X3 (Foveon) (appareils Sigma, bientôt chez Sony ?)



Trame de Bayer

hors programme

Exemple d'image obtenue par la trame de Bayer (par ex. fichier RAW d'un reflex numérique).



Fichier RAW (12 bits) compressé sans perte $\xrightarrow{\text{interpolation}}$ Fichier TIFF ou JPEG 24 bits.

Trame de Bayer

hors programme

Interpolation possible



Fichier RAW (12 bits) compressé sans perte



Fichier TIFF ou JPEG 24

bits.

interpolation

Interpolation bilinéaire

hors programme

A gauche, image "LightHouse" originale. A droite, image obtenue par interpolation bilinéaire de chaque couleur de la trame de Bayer.



→ satisfaisant dans les régions homogènes mais lissage des bords et textures et apparition de fausses couleurs, en particulier près des bords ou des zones hautes fréquences présentant des motifs complexes (interpolation naïve d'images aliées)

Principe des algorithmes de détramage

hors programme

Notation : Ω_r est l'ensemble des pixels "rouges" (resp. verts ou bleus pour Ω_g ou Ω_b) de la trame de Bayer.

- 1 Estimation des **dérivées** (premières, secondes) en chaque point de l'image à l'aide de schémas discrets ;
- 2 **Interpolation anisotrope de la composante verte** aux points de $\Omega_r \cup \Omega_b$.
Les directions dans lesquelles la dérivée est la moins importante sont **privilegiées** (seuil ou fonction décroissante de la dérivée).
- 3 **Interpolation de b/r et g/r** ou de $b - r$ et $g - r$.
- 4 Eventuellement itération des corrections précédentes.

Cok (1986), Hibbard (1995), Hamilton et Addams (1997), Kimmel (1999), Hirakawa et Paks (2005).

Interprétation en termes de basses et hautes fréquences.

Algorithme de Kimmel (1999)

hors programme

A gauche, résultat obtenu en utilisant l'algorithme de Kimmel.

A droite, interpolation bilinéaire de chaque composante.



R. KIMMEL, Demosaicing : Image Reconstruction from Color Samples, IEEE Trans. Image Processing, Vol. 8, no. 9, 1999, pp. 1221-1228.

Démosaïquage non local (Buades-Coll-Morel 2007)

hors programme

Initialisation : u_0 première interpolation obtenue par un algorithme classique.

Puis, pour tous les pixels x non renseignés de la composante g ($x \notin \Omega_g$)

$$NL[g](x) = \frac{1}{C_g(x)} \int_{\Omega_g} e^{-\frac{(G_a * \|u_0(x+\cdot) - u_0(y+\cdot)\|^2)(0)}{h^2}} g(y) dy,$$

avec $C_g(x)$ constante de normalisation valant

$$C_g(x) = \int_{\Omega_g} e^{-\frac{(G_a * \|u_0(x+\cdot) - u_0(z+\cdot)\|^2)(0)}{h^2}} dz.$$

Même interpolation pour les composantes b et r , ou pour les différences $r - g$ et $b - g$.

Stratégie progressive avec h décroissant, en alternance avec une réduction des aberrations chromatiques (color mismatching reduction) par régularisation des composantes chromatiques dans l'espace YUV.

A. Buades, B. Coll, J.M Morel, C. Sbert "Non local demosaicing", Preprint CMLA 2007-15, 2007.

Démosaïquage non local (Buades-Coll-Morel 2007)

hors programme

Résultats obtenus avec les séquences $h = (32, 16, 4, 1)$ et $h = (64, 32, 16, 4, 1)$

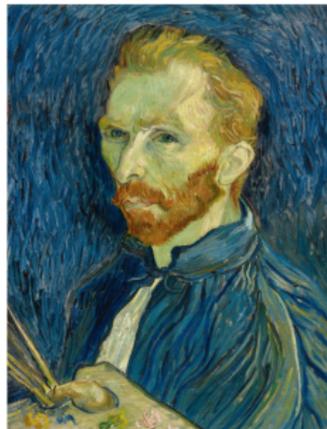


Extrait de A. Buades, B. Coll, J.M Morel, C. Sbert "Non local demosaicing", Preprint CMLA 2007-15, 2007.

Cinquième partie V

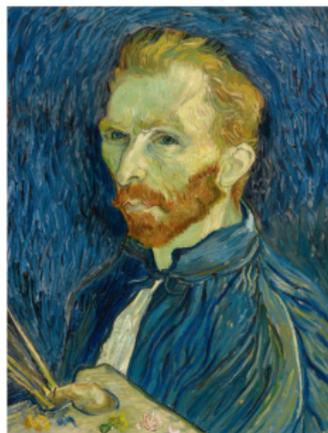
Transport de couleur

Modification d'une palette de couleurs



Comment donner à la première image la même palette de couleurs que la deuxième ?

Modification d'une palette de couleurs



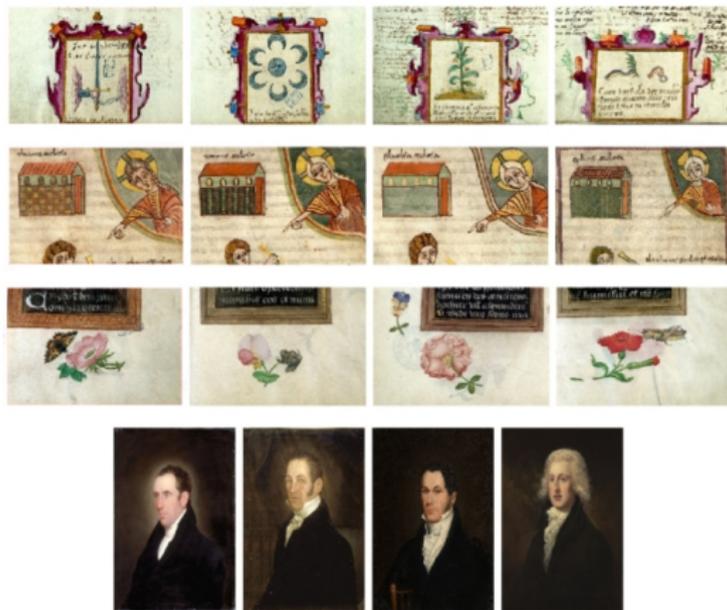
Comment donner à la première image la même palette de couleurs que la deuxième ?

Le Radeau de la Méduse, de Géricault



Quelle palette de couleurs intermédiaire entre toutes ces images ?

Recherche d'images par le contenu



Quelle distance définir pour comparer l'organisation spatiale des couleurs entre deux images ?

Images extraites de la thèse de Thomas Hurtut, "Analyse et recherche d'oeuvres d'art 2D selon le contenu pictural" 2007.

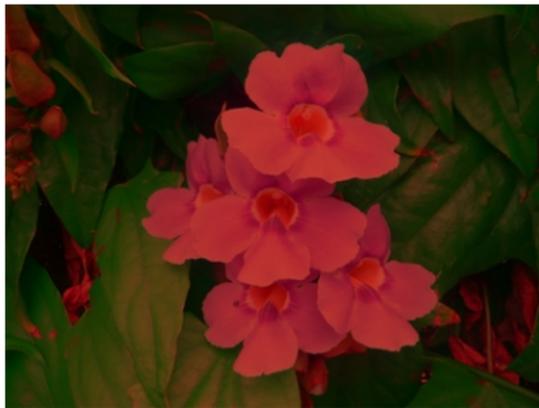
Solution affine

Reinhard et al. *Color Transfer between Images*, 2001.



Solution affine

Reinhard et al. *Color Transfer between Images*, 2001.

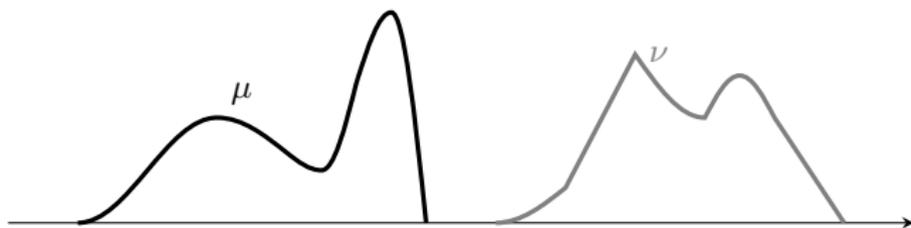


Transport Optimal - Introduction



Problème de Monge [1781]

- Comment envoyer le sable des déblais vers les remblais tout en minimisant l'effort fourni ?



Villani, C., *Topics in optimal transportation*. American Mathematical Society, 2003.

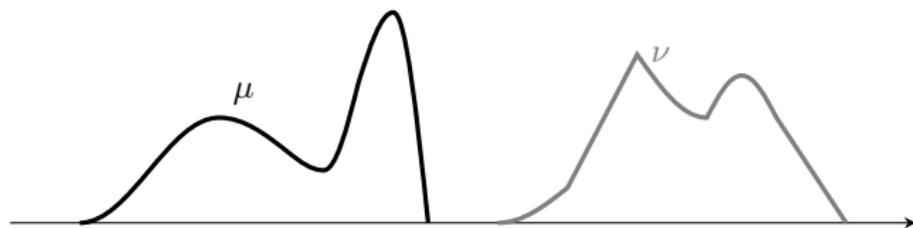
Villani, C., *Optimal transport : old and new*. Springer Verlag, 2008.

Transport Optimal - Introduction



Problème de Monge [1781]

- Comment envoyer le sable des déblais vers les remblais tout en minimisant l'effort fourni ?
- Les déblais et remblais sont modélisés par deux mesures de probabilité μ et ν sur \mathcal{X} (ex : $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$)



Villani, C., *Topics in optimal transportation*. American Mathematical Society, 2003.

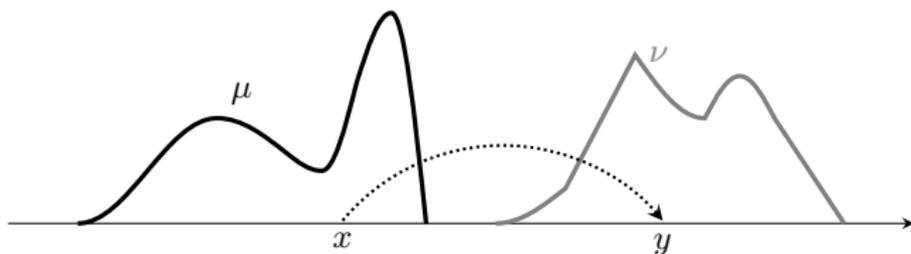
Villani, C., *Optimal transport : old and new*. Springer Verlag, 2008.

Transport Optimal - Introduction



Problème de Monge [1781]

- Comment envoyer le sable des déblais vers les remblais tout en minimisant l'effort fourni ?
- Les déblais et remblais sont modélisés par deux mesures de probabilité μ et ν sur \mathcal{X} (ex : $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$)
- On note $c(x, y)$ le **coût** du transport d'une masse unité du point x vers y



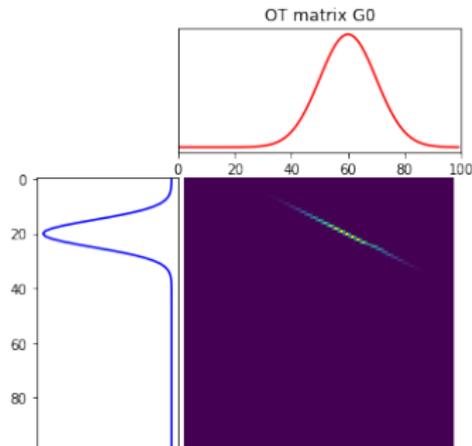
Villani, C., *Topics in optimal transportation*. American Mathematical Society, 2003.
Villani, C., *Optimal transport : old and new*. Springer Verlag, 2008.

Transport Optimal - Introduction

Transport optimal [Kantorovich, *On the transfer of masses*, 1942] On cherche

$$\text{MK}_c(\mu, \nu) := \inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \iint_{x, y} c(x, y) d\gamma(x, y) = \inf_{X \sim \mu, Y \sim \nu} \mathbb{E}[c(X, Y)]$$

avec $\Pi(\mu, \nu) = \{\text{mesures de proba sur } \mathcal{X} \times \mathcal{X} \text{ de marginales } \mu \text{ et } \nu\}$, appelé ensemble des plans de transport entre μ et ν .



(source figure : Rémy Flammary)

Une distance entre distributions

Distance de Wasserstein (ou de Monge-Kantorovich) d'ordre r

Si d est une distance sur \mathcal{X} , et si $r \geq 1$,

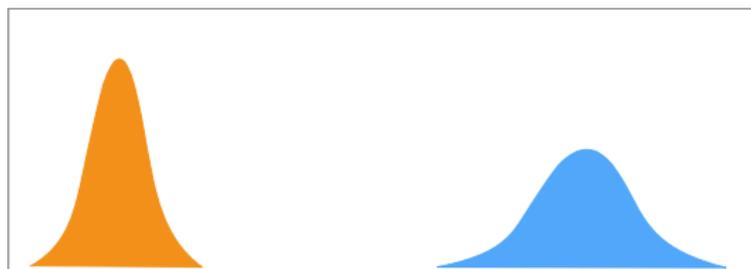
$$\text{MK}_{d^r}(\cdot, \cdot)^{\frac{1}{r}}$$

est une distance sur l'espace des mesures de probabilité ayant des moments d'ordre r finis.

→ si $r = 1$, distance de Kantorovich-Rubinstein, ou *Earth Mover's Distance* (EMD) [Rubner *et al.*, 2000].

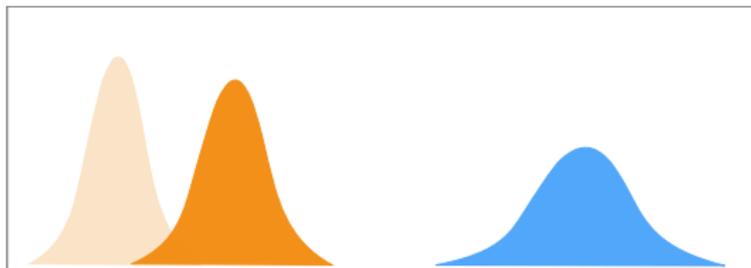
Une distance entre distributions

Barycentres de Wasserstein = barycentres pour la distance de Wasserstein



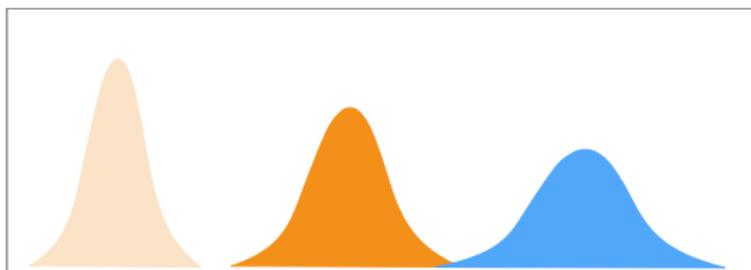
Une distance entre distributions

Barycentres de Wasserstein = barycentres pour la distance de Wasserstein



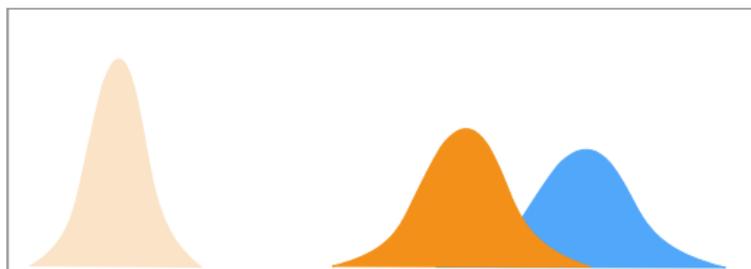
Une distance entre distributions

Barycentres de Wasserstein = barycentres pour la distance de Wasserstein



Une distance entre distributions

Barycentres de Wasserstein = barycentres pour la distance de Wasserstein

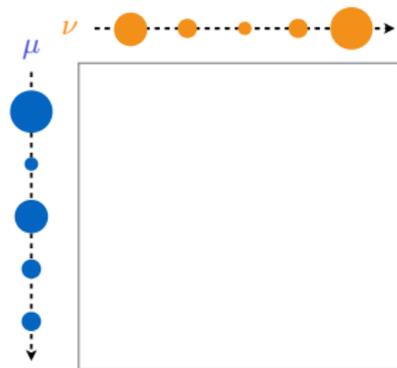


Une distance entre distributions

Barycentres de Wasserstein = barycentres pour la distance de Wasserstein



Mesures discrètes



$$\mu = \sum_{i=1}^M s_i \delta_{x_i} \text{ fournitures des usines } \{x_i\}.$$

$$\nu = \sum_{j=1}^N d_j \delta_{y_j} \text{ demandes des clients } \{y_j\}.$$

$\Pi(\mu, \nu) =$ ensemble des $\gamma = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \delta_{(x_i, y_j)}$, où $(\gamma_{ij})_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N}$ satisfait les contraintes

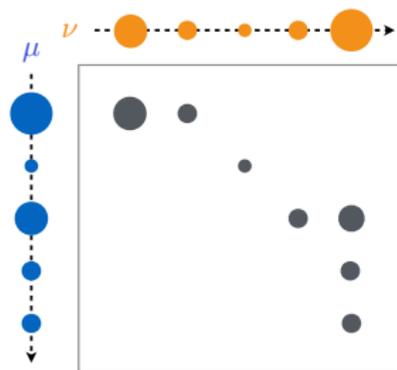
$$\gamma_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} = s_i, \quad \sum_{i=1}^M \gamma_{ij} = d_j.$$

On cherche donc à minimiser sous ces contraintes la quantité :

$$I(\gamma) = \sum_{i,j} c(x_i, y_j) \gamma_{ij},$$

Cas particulier d'une classe de problèmes appelés **programmation linéaire**. Très usuels en logistique.

Mesures discrètes



$$\mu = \sum_{i=1}^M s_i \delta_{x_i} \text{ fournitures des usines } \{x_i\}.$$

$$\nu = \sum_{j=1}^N d_j \delta_{y_j} \text{ demandes des clients } \{y_j\}.$$

$\Pi(\mu, \nu) =$ ensemble des $\gamma = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \delta_{(x_i, y_j)}$, où $(\gamma_{ij})_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N}$ satisfait les contraintes

$$\gamma_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} = s_i, \quad \sum_{i=1}^M \gamma_{ij} = d_j.$$

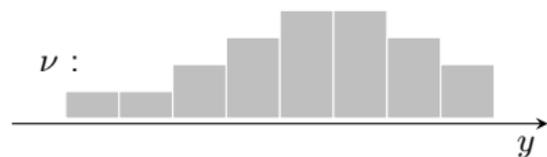
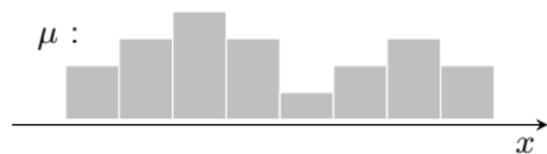
On cherche donc à minimiser sous ces contraintes la quantité :

$$I(\gamma) = \sum_{i,j} c(x_i, y_j) \gamma_{ij},$$

Cas particulier d'une classe de problèmes appelés **programmation linéaire**. Très usuels en logistique.

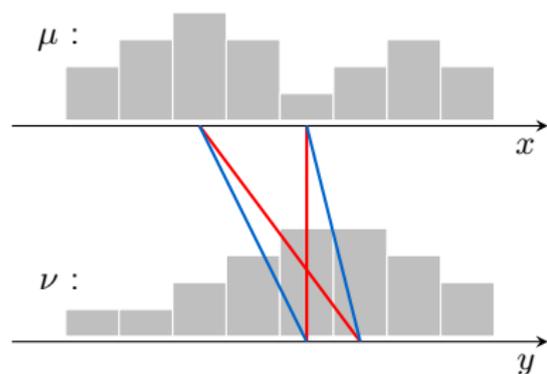
Transport en dimension 1

Supposons que $c(x, y) = |x - y|^2$ sur \mathbb{R} .



Transport en dimension 1

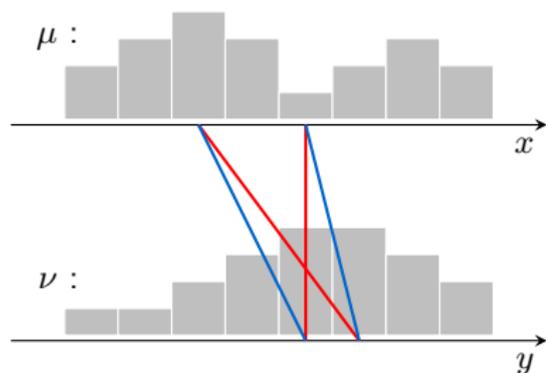
Supposons que $c(x, y) = |x - y|^2$ sur \mathbb{R} .



Si $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$, $c(x_1, y_1) + c(x_2, y_2) < c(x_1, y_2) + c(x_2, y_1)$.
Donc, n'importe quel plan optimal préserve l'ordre des points sur \mathbb{R} .

Transport en dimension 1

Supposons que $c(x, y) = |x - y|^2$ sur \mathbb{R} .



Si $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$, $c(x_1, y_1) + c(x_2, y_2) < c(x_1, y_2) + c(x_2, y_1)$.
Donc, n'importe quel plan optimal préserve l'ordre des points sur \mathbb{R} .

La solution au problème est donnée par le **réarrangement monotone** de μ sur ν .

M et N bins : $O(M + N)$ opérations

Distribution cumulée de μ et son inverse généralisée

$$F_\mu(t) = \mu((-\infty, t]), \quad F_\mu^{-1}(v) = \inf\{t \in \mathbb{R}; F_\mu(t) > v\}, \quad v \in [0, 1].$$

Théorème Si $c(x, y) = |x - y|^2$ sur \mathbb{R} , une solution au problème du transport optimal est donnée par le **réarrangement monotone** de μ sur ν et

$$\text{MK}_c(\mu, \nu) = \int_0^1 |F_\mu^{-1}(v) - F_\nu^{-1}(v)|^2 dv.$$

→ formules de **spécification d'histogramme** vues au cours précédent :

- le **barycentre** de L distributions (ν^1, \dots, ν^L) pour des poids (ρ_1, \dots, ρ_L) est la distribution qui atteint l'infimum de $\sum_{l=1}^L \rho_l \text{MK}_c(\mu, \nu^l)^2$.
- **Midway** vu au cours précédent = cas particulier obtenu lorsque les poids sont égaux.

Grâce au cadre théorique du transport optimal, on peut généraliser ces notions aux images en couleurs.

Algorithmes pour calculer le transport en dimension > 1

Appariement

- Algorithme hongrois [Kuhn 1995]. $O(N^3)$,
- Algorithme des enchères [Bertsekas 1992]

Programmation linéaire

- Network Simplex [Cunningham 1976] $O(N^3)$

Approches utilisant les outils de la mécanique des fluides [Brenier, Benamou, 2000]

Formulation Semi-discrète [Mérigot 2011]

Algorithmes d'approximation

- Sliced ou Radon optimal transport [Rabin et al. 2015]
- Algorithme Sinkhorn ou transport entropique [Cuturi 2013]

Transport entropique

hors programme

Entropie de la matrice γ

$$H(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{i,j} \gamma_{i,j} (\log(\gamma_{i,j}) - 1)$$

Transport entropique

$$\arg \min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \sum_{i,j} c(x_i, y_j) \gamma_{ij} - \varepsilon H(\gamma)$$

Transport entropique

hors programme

Entropie de la matrice γ

$$H(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{i,j} \gamma_{i,j} (\log(\gamma_{i,j} - 1))$$

Transport entropique

$$\arg \min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \sum_{i,j} c(x_i, y_j) \gamma_{ij} - \varepsilon H(\gamma)$$

Si on pose $K_{i,j} = e^{-\frac{c(x_i, y_j)}{\varepsilon}}$, alors

$$\arg \min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \sum_{i,j} c(x_i, y_j) \gamma_{ij} - \varepsilon H(\gamma) = \arg \min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} KL(\gamma || K)$$

Transport entropique

hors programme

Entropie de la matrice γ

$$H(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{i,j} \gamma_{i,j} (\log(\gamma_{i,j}) - 1)$$

Transport entropique

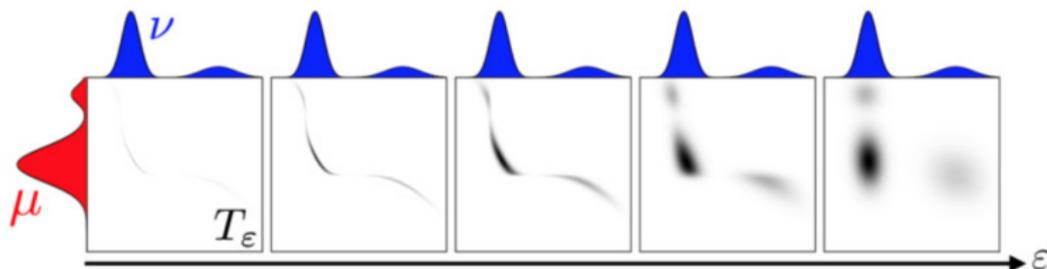
$$\arg \min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \sum_{i,j} c(x_i, y_j) \gamma_{ij} - \varepsilon H(\gamma)$$

Si on pose $K_{i,j} = e^{-\frac{c(x_i, y_j)}{\varepsilon}}$, alors

$$\arg \min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \sum_{i,j} c(x_i, y_j) \gamma_{ij} - \varepsilon H(\gamma) = \arg \min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} KL(\gamma || K)$$

Algorithme Sinkhorn

→ Projections alternées de K sur les contraintes de $\Pi(\mu, \nu)$



Expériences - midway

Avant égalisation midway



Expériences - midway

Après égalisation midway



Application aux panoramas



Application aux panoramas



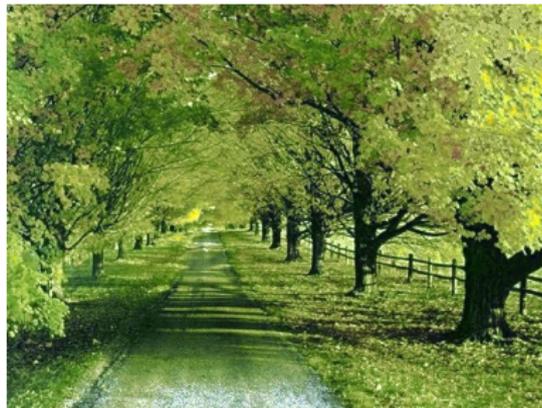
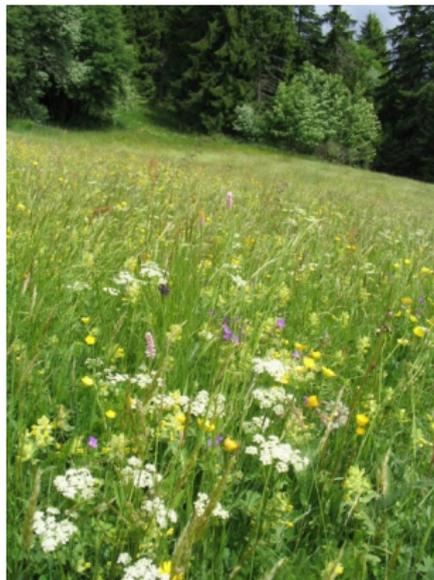
Application aux panoramas



Transfert de couleurs



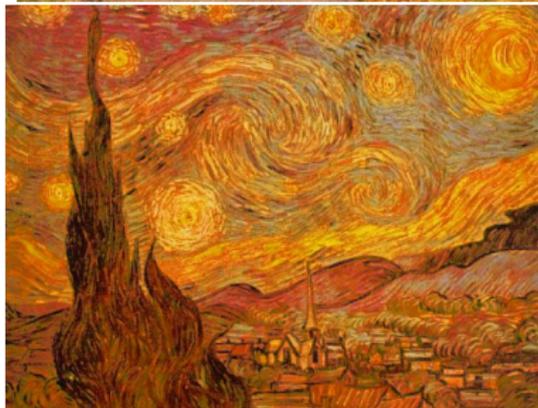
Transfert de couleurs



Transfert de couleurs



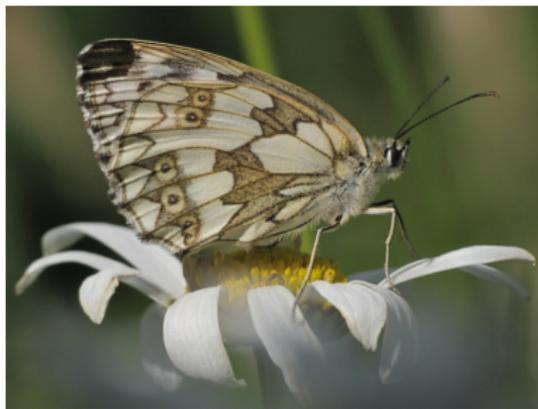
Transfert de couleurs



Transfert de couleurs



Transfert de couleurs



Défauts introduits par les changements de contraste et de couleur

- Augmentation du bruit
- Perte de détails
- Apparition de défauts de compression



u



v



$g(u)$

Régularisation TMR

hors programme

Solutions **variationnelles** [Pitie *et al.*, 2007], [Papadakis *et al.*, 2011], [Rabin, Peyré, 2011].

Transportation Map Regularization [Rabin, Delon, Gousseau, 2011] : régulariser la différence $g(u) - u$ conditionnellement à l'image source u .

Inspiré par les travaux de débruitage : Neighborhood filter [Yarovslavski 1985] et Non-Local means [Buades, Coll and Morel 2005]

$$\text{TMR}_u[g(u)] := u + Y_u[g(u) - u] = \underbrace{Y_u[g(u)]}_{\text{régularisation de } g(u)} + \underbrace{u - Y_u[u]}_{\text{Détails de } u}$$

où Y_u est le filtre guidé

$$Y_u[w](x) = \frac{1}{C(x)} \int_{y \in \mathcal{N}(x)} w(y) e^{-\frac{\|u(x) - u(y)\|^2}{\sigma^2}} dy.$$

Régularisation TMR - Résultats

hors programme



Régularisation TMR - Résultats

hors programme



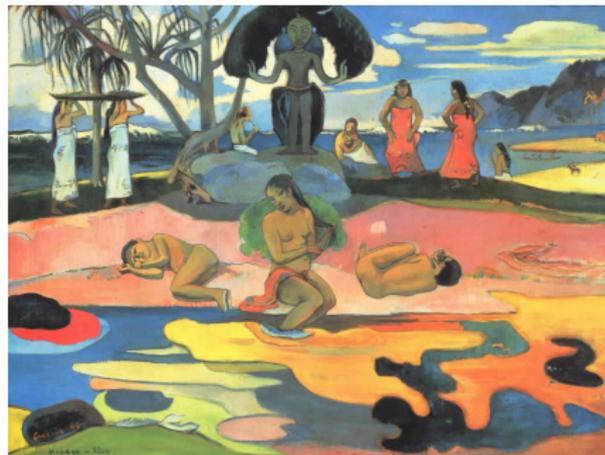
Régularisation TMR - Résultats

hors programme



Régularisation TMR - Résultats

hors programme



Régularisation TMR - Résultats

hors programme



Régularisation TMR - Résultats

hors programme



Transfert de couleur vidéo

O. Frigo, N. Sabater, V. Demoulin, P. Hellier, Optimal Transportation for Example-Guided Color Transfer, ACCV, 2014.