Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, 2014-2015, Introduction aux probabilités

# Feuille de TD n°8 : Estimation et Intervalles de confiance.

**Exercice 1** Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre $\lambda$. On note $\bar{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$.

1. Calculer l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$.
2. Montrer que $\bar{X}_n$ converge vers $\lambda$.
3. Montrer que $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1)$ converge en loi vers une Gaussienne dont on précisera les paramètres.
4. En calculant $\mathbb{P}(\bar{X}_n \leq 1)$ pour $\lambda = 1$, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n} \left(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}.$$

**Exercice 2** On effectue un sondage sur $n$ personnes choisies de façon indépendante. On émet l'hypothèse que la probabilité $p$ de répondre OUI à la question posée est la même dans toute la population. On note $S_n$ le nombre de personnes répondant OUI et on estime $p$ par la proportion empirique $S_n/n$.

1. Montrer que $S_n/n$ converge ps vers $p$ et que c'est une estimateur sans biais de $p$.
2. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycev, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{0.05}\sqrt{n}}\right) = 95\%.$$

3. Avec quelle précision estime t-on $p$ en calculant $\frac{1}{n}S_n$ si on effectue le sondage sur 1000 personnes ?
4. Montrer que $\sqrt{n}(S_n/n - p)$ converge en loi vers une Gaussienne dont on précisera les paramètres.
5. On rappelle que si $X$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}(|X| \leq 1.96) \simeq 95\%$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \leq 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 95\%.$$

   Quelle précision obtient-on avec cette formule ? Qu'en pensez-vous ?

**Exercice 3** Des gendarmes placent un radar au bord d'une autoroute afin de détecter les excès de vitesse commis à cet endroit. On suppose que le nombre d'excès de vitesse commis durant une journée est une variable de Poisson de paramètre $\lambda = 2.7$.

1. Quelle est la loi du nombre d'excès de vitesse enregistrés durant une année ? On fera l'hypothèse d'indépendance qui s'impose.
2. Donner une approximation de la probabilité pour que le nombre d'excès de vitesse enregistrés durant une année soit strictement plus grand que 1000.

**Exercice 4** Un nombre $n$ de composants électroniques sont mis en fonctionnement à la date 0 et on note $X_i$ la date, comptée en années, à laquelle le $i^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On suppose que les $X_i$ sont indépendants et suivent tous la même loi exponentielle de paramètre inconnu $\lambda > 0$. On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne empirique de $X$. Le paramètre $\lambda$ est inconnu et on cherche à obtenir de l'information sur celui-ci au vu des $X_i$.

1. Rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de $X_1$.
2. Montrer que $\bar{X}_n$ converge ps vers une valeur à déterminer. Appliquer le théorème central limite à $\bar{X}_n$.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, déterminer un intervalle de confiance pour $1/\lambda$ au niveau de confiance $1-\alpha$, c'est-à-dire trouver $c_\alpha > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\left(\bar{X}_n - c_\alpha \leq \frac{1}{\lambda} \leq \bar{X}_n + c_\alpha\right) \geq 1 - \alpha.$$

   En déduire un intervalle de confiance pour le paramètre $\lambda$.
4. Comparer la longueur des intervalles obtenus par cette inégalité et par l'approximation normale pour $\alpha = 0.05$,