Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, 2015-2016, parcours Informatique, INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS

Feuille de TD n°3 : Indépendance d'événements, variables aléatoires

Exercice 1 Une auto-école présente le même jour trois candidats au permis : André, Denis et Nicole. Sur la base des performances précédentes, le directeur estime les probabilités de succès : pour André 0.7, pour Denis 0.5, pour Nicole 0.9. Quelles sont les probabilités des événements suivants :

1. $B =$"Denis est le seul à réussir",
2. $R =$"Les trois condidats réussissent",
3. $E =$"les trois candidats échouent",
4. $P =$"au moins un candidat est reçu" ?

Exercice 2 Trois chasseurs tirent sur un oiseau, avec des probabilités de succès de 70%, 50% et 90% respectivement. Quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Exercice 3 Trois étudiants x, y et z attendent dans une file à la porte du secrétariat. On considère les deux événements

— A : "y attend derrière x"
— B : "z attend derrière x"

On suppose qu'il y a équiprobabilité sur l'ordre d'arrivée des étudiants. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 4 Un fabricant d'ordinateurs importe des claviers de trois pays A, B et C, dans des proportions respectives $p_A = 0,3$, $p_B = 0,25$ et $p_C = 0,45$. Selon sa provenance, la probabilité qu'un clavier soit défectueux est, respectivement, de $q_A = 0,05$, $q_B = 0,08$ et $q_C = 0,09$.

1. Déterminer la probabilité qu'un clavier importé soit défectueux.
2. Dans un lot (tous les claviers d'un lot proviennent du même pays), on extrait deux claviers. Le premier ne fonctionne pas. Quelle est la probabilité pour qu'il en soit de même pour le deuxième ?

Exercice 5 On lance une fois un dé non pipé.

1. On suppose qu'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obtient 2,3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Quelle est la loi de G ? Que vaut le gain moyen ?
2. Mêmes questions en supposant qu'on gagne 27 euros pour un 1 et rien sinon. Préférez vous jouez au jeu du 1) ou à celui-ci ?

Exercice 6 On lance une fois un dé non pipé. Soit X la variable aléatoire égale au résultat du dé. On pose $Y = X^2$ et $Z = (X-3)^2$.

1) Quelle est la loi de Y ?
2) Donner la loi de Z et la représenter sous forme d'un graphique (diagramme en bâtons).

Exercice 7 On considère un sac contenant deux boules rouges et quatre boules noires, indiscernables au toucher.

1) On tire successivement une boule, **avec remise**, jusqu'á obtenir une boule rouge. On note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.
2) On tire successivement une boule, **sans remise**, jusqu'à obtenir une boule rouge, et on note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.

Exercice 8 On lance trois fois de suite un dé. Soit X le nombre de valeurs distinctes obtenues (par exemple $X = 3$ si le résultat des lancers est $(1, 2, 6)$ et $X = 2$ s'il est $(4, 4, 2)$). Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 9 Le participant d'un jeu télévisé doit choisir entre deux questions, une question facile et une question difficile. S'il répond juste une première fois, il peut tenter de répondre à l'autre. La question facile rapporte un euro et la question difficile 3 euros. Les questions sont indépendantes, et il estime avoir 30% de chances de bien répondre à la question difficile, et 60% de chances pour la question facile. Calculer la loi et l'espérance de son gain dans le cas où il choisit la question facile en premier, puis dans le cas contraire. Quelle question doit-il choisir ?

Exercice 10 Les étudiants d'un cours de probabilités sont répartis en trois groupes pour les séances d'exercices, comprenant respectivement 25, 30 et 35 étudiants. On choisit au hasard un étudiant du cours et on note X le nombre d'étudiants de son groupe. Calculer la loi et l'espérance de X. Cette espérance est-elle égale à la moyenne du nombre d'étudiants par groupe ?

Exercice 11 Soient $c \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire de support égal à $\mathbb{N}$, avec $P(X = n) = c\frac{2^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la valeur de c puis l'espérance de X.
2. Mêmes questions en supposant cette fois $P(X = n) = c\frac{1}{n^2}$.