Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, 2015-2016, parcours Informatique, Introduction aux probabilités

Feuille de TD n°5 : Loi de Poisson, loi exponentielle, lois à densité

Loi de Poisson

Exercice 1 Dans la mémoire d'un ordinateur il se peut que certains "bit" enregistrés soient inexacts. Ce phénomène étant rare on suppose que le nombre de "bit" erronés suit une loi de Poisson. Cependant il est plus fréquent de voir apparaître un 0 à la place d'un 1 que le contraire. Soit X_1 le nombre de faux 0 et X_2 le nombre de faux 1. On suppose ces variables indépendantes et de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, avec $\lambda_1 > \lambda_2$.

1. Quelle est la loi du nombre total d'erreurs ?
2. Sachant que n erreurs ont été commises, combien y a-t-il de faux 0 ?

Exercice 2 Dans un bureau de poste, il y a 10 guichets. En une journée, le nombre de clients qui se présentent à ce bureau de poste est une v.a. X, de loi de Poisson de paramètre λ, λ réel strictement positif. On suppose que les clients choisissent au hasard un guichet, de façon indépendante. Soit Y le nombre de clients qui choisissent le guichet 1.

1. Calculer $\mathbb{P}(Y = k | X = n)$ où k et n sont des entiers naturels.
2. En déduire la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Loi exponentielle

Exercice 3
Il est courant d'utiliser la loi exponentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$ comme loi de durée de vie d'un matériel électronique. Cette loi a pour densité $\lambda e^{-\lambda x}$ sur $\mathbb{R}^+$, λ réel strictement positif. Soit X une variable de loi $(\mathcal{E}_\lambda)$.

1. Calculer la fonction de répartition de X, son espérance et sa variance.
2. Calculer $P(X \geq t + s | X \geq t)$, pour $s, t > 0$. On dit que la loi $(\mathcal{E}_\lambda)$ est sans mémoire.
3. Calculer $\lim_{s \to 0^+} \frac{1}{s} P(X \leq t+s | X \geq t)$. Commenter (que se passe-t-il si λ est petit ? s'il est grand ?).

Exercice 4 Un matériel comprend n composants dont les durées de vie (temps écoulé avant une panne) X_i sont supposées indépendantes et de lois $(\mathcal{E}_{\lambda_i})$, $1 \leq i \leq n$. Le matériel tombe en panne dès que l'un de ses composants est en panne. On note Y la durée de vie de ce matériel.

1. Calculer la fonction de répartition de Y.
2. Quelle est la loi de Y , son espérance et sa variance ?

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire de loi $(\mathcal{E}_\lambda)$. On définit la variable $Y = [X]$, la partie entière de X, c'est-à-dire l'entier immédiatement inférieur ou égal à X.

1. Quelle est la loi de Y ?
2. Que peut-on dire de $P(Y \geq k + l \mid Y \geq k)$? Commenter.
3. Calculer la moyenne de cette loi (refaire la démonstration du résultat vu en cours).
4. Calculer la variance de cette loi (appliquer la formule vue en cours).

Loi quelconque

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} cx \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ c(1-x) \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Que vaut c ? Représenter sur un graphique la fonction f_X.
2. Calculer et représenter la fonction de répartition de X.
3. En déduire $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$ et $P(\frac{3}{4} \leq X \leq \frac{5}{4})$.

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :

$$\begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ \frac{x}{2} \text{ si } x \in [0, 1[, \\ 1 \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de F_X . X est-elle une variable discrète ? Une variable à densité ?
2. Donner les valeurs de $P(X = \frac{1}{2}), P(X = 1), P(\frac{3}{4} < X \leq 1)$ et $P(\frac{3}{4} < X < 1)$.

Exercice 8 Pour quelles valeurs de c les fonctions suivantes sont-elles des densités de probabilité ? Calculer leur espérance et leur variance quand cela est possible.

1. $f_1(x) = cx^k, \ 0 \leq x \leq 1, \ k \in \mathbb{N}^*$.
2. $f_2(x) = ce^{-|x|}, \ x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 On observe au cours du temps la suite des variables $(X_i)_{i \geq 1}$qui sont indépendantes et de fonction de répartition commune F.

1. Quelle est la fonction de répartition de la variable $Y_n = \max\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$?
2. Celle de la variable $Z_n = \min\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$?
3. Celle du couple (Y_n, Z_n) ?