Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, 2008-2009, Introduction aux probabilités

Examen 9 janvier 2009

Exercice 1 Au cours de la copie d'un fichier informatique, il existe une probabilité $p = 10^{-5}$ d'erreur pour chaque bit recopié. La taille du fichier est de $n = 300\,000$ bits. On suppose que toutes les copies de bit sont indépendantes. On note X le nombre total d'erreurs de copie.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. Expliquer pourquoi on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre 3. Rappeler l'expression de cette loi. On donne ci-dessous les premières valeurs de la loi de Poisson de paramètre 3 :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	0.05	0.15	0.22	0.22	0.17	0.10	0.05	0.02	0.01

3. Avec cette approximation, calculer la probabilité que le nombre d'erreurs de copie soit inférieur à 5.

Exercice 2 Lors d'une compétition de saut en hauteur, un athlète doit franchir des barres placées à $2m$, $2m10$, $2m20$, $2m30$, $2m40$, etc. Pour chaque hauteur, il dispose de trois essais. Pour un saut, on appelle H la hauteur atteinte. Le saut est réussi si la hauteur H est supérieure à la hauteur de la barre. On suppose que H est une variable uniforme sur l'intervalle $[1.95, 2.35]$. Après un succès, l'athlète passe à la barre suivante. On considère que tous les sauts sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'athlète franchisse la barre de $2m$ au premier saut ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas franchi la barre de $2m$ après trois essais ? En déduire la probabilité qu'il réussisse à passer la barre de $2m$.
3. S'il a passé la barre des $2m$, quelle est la probabilité qu'il passe la suivante ($2m10$) ?

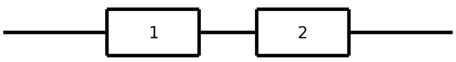
On note X la hauteur de la dernière barre qu'il parvient à franchir.

4. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
5. Calculer la loi de X et son espérance.

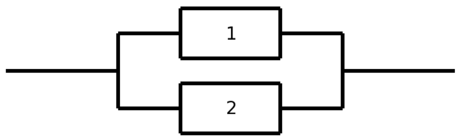
Exercice 3 On dispose de deux composants électroniques dont les durées de vie (temps avant la panne), exprimées en années, sont modélisées par des variables aléatoires X et Y indépendantes. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre 1 et Y une loi exponentielle de paramètre 2.

1. Rappeler les expressions des densités f_X et f_Y des densités de probabilité des variables X et Y.
2. Calculer les fonctions de répartition F_X et F_Y de X et Y.

On considère deux montages possibles pour ces composants : en série ou en parallèle.



montage en série



montage en parallèle

Le système monté en série tombe en panne dès que l'un des composants tombe en panne. Le système monté en parallèle tombe en panne lorsque les deux composants sont tombés en panne. On note S la durée de vie du système en série et T celle du système en parallèle.

3. Soit $x \geq 0$. Exprimer les événements $[S \leq x]$ et $[T \leq x]$ en fonction des événements $[X \leq x]$ et $[Y \leq x]$.
4. Calculer la fonction de répartition F_T de T et en déduire sa densité f_T.
5. Calculer la fonction de répartition F_S de S et en déduire sa densité f_S.
6. Calculer $P(X > x | S \leq x)$.
7. Sachant que le composant de durée de vie X est tombé en panne avant l'instant x, quelle est la probabilité que le système en parallèle fonctionne toujours à un instant t (avec $t > x$) ?