

**Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique**  
**Examen du 12/01/2010 - Durée : 1 heure 30**

**Exercice 1**

1. On lance successivement deux pièces de monnaie de manière indépendante. L'une des deux est tombée sur Pile. Quelle est la probabilité que l'autre soit tombée sur Face ?
2. On lance successivement deux pièces de monnaie de manière indépendante. La première est tombée sur Pile. Quelle est la probabilité que l'autre soit tombée sur Face ?

**Exercice 2** On s'intéresse au nombre  $N$  de visiteurs de la tour Eiffel en une journée. On suppose que  $N$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda_1 = 10000$  si la journée est pluvieuse ; et la loi de Poisson de paramètre  $\lambda_2 = 30000$  s'il ne pleut pas. On suppose de plus qu'il pleut en moyenne un jour sur deux à Paris.

1. Rappeler l'expression de la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , son espérance et sa variance.
2. Calculer la loi de  $N$ .
3. Calculer  $E(N)$ ,  $E(N^2)$ , puis  $V(N)$ . En déduire que  $N$  ne suit pas une loi de Poisson.

**Exercice 3** On lance  $n$  fois un dé à six faces et on note :  $X$  le nombre de fois que l'on obtient un résultat pair, et  $Y$  le nombre de fois que l'on obtient un résultat inférieur ou égal à 3.

1. Quelles sont les lois de  $X$  et  $Y$  ?
2. Calculer  $P(X = 0, Y = 0)$ . Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. Pour  $n = 1$ , déterminer la loi du couple  $(X, Y)$  (on donnera les résultats sous forme de tableau)

**Exercice 4** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que l'espérance  $\mu$  et la variance  $\sigma^2$  commune aux  $X_i$  sont bien définies :  $\mu = E(X_i)$  et  $\sigma^2 = V(X_i)$  pour tout  $i \geq 1$ . On note  $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ .

1. Calculer  $E(\bar{X}_n)$  et  $V(\bar{X}_n)$  en fonction de  $\mu, \sigma, n$ .
2. En déduire que  $\bar{X}_n$  converge en moyenne quadratique vers  $\mu$ . Quel nom donne-t-on à ce résultat ?
3. Par quelle loi peut-on approcher  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$  lorsque  $n$  est grand ?

Un réservoir est alimenté directement par l'eau de pluie. La probabilité qu'il pleuve dans une journée est de  $p = \frac{1}{3}$ , et toutes les journées sont supposées indépendantes de ce point de vue. On considère que s'il pleut moins de 110 jours dans l'année, alors le niveau du réservoir devient insuffisant pour les besoins de la population. On note  $N$  le nombre de jours de pluie dans l'année ( $n = 365$  jours).

4. Quelle est la loi de  $N$  ? Donner son espérance et sa variance.
5. Expliquer pourquoi on peut écrire que  $N = X_1 + \dots + X_n$  où les  $X_i$  sont des variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

6. Utiliser le résultat de la question 3) pour donner une approximation de  $P(N \leq 110)$ .  
On donne  $\frac{35}{\sqrt{730}} \simeq 1.30$  ainsi que le graphe de la fonction de répartition de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  :

