Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Correction de l'examen du 12/01/2010

Exercice 1 Notons F_1 ="la première pièce tombe sur Face" et F_2 ="la deuxième pièce tombe sur Face". F_1 et F_2 sont indépendants et $P(F_1) = P(F_2) = 1/2$.

1. On cherche $P(A|B)$ où A ="une des deux pièces est tombée sur Face" et B ="une des deux pièces est tombée sur Pile".

$$\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P((F_1\cap F_2^c)\cup(F_1^c\cap F_2))}{P(F_1\cup F_2)} \\
&= \frac{P(F_1\cap F_2^c)+P(F_1^c\cap F_2)}{1-P(F_1^c\cap F_2^c)} \qquad \text{(événements disjoints)} \\
&= \frac{P(F_1)P(F_2^c)+P(F_1^c)P(F_2)}{1-P(F_1^c)P(F_2^c)} \qquad \text{(indépendance)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

2. On cherche $P(F_2|F_1^c)$.

$$\begin{aligned}
P(F_2|F_1^c) &= \frac{P(F_2\cap F_1^c)}{P(F_1^c)} = \frac{P(F_2)P(F_1^c)}{P(F_1^c)} \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Une variable X suit la loi de Poisson lorsque

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{pour } k \geq 0.$$

On a $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

2. Soit A ="la journée est pluvieuse". Pour tout $k \geq 0$ on a

$$P(N=k) = P(N=k|A)P(A)+P(N=k|A^c)P(A^c) \qquad \text{(formule des probabilités totales).}$$

Or d'après les hypothèses, la loi conditionnelle de N sachant A est la loi de Poisson de paramètre λ_1. Donc $P(N=k|A) = e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}$. De même $P(N=k|A^c) = e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^k}{k!}$. De plus $P(A) = P(A^c) = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$P(N=k) = \frac{1}{2}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} + \frac{1}{2}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^k}{k!}.$$

3.

$$\begin{aligned}
\bullet \quad E(N) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} + \frac{1}{2}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^k}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^k}{k!}\right).
\end{aligned}$$

Les deux expressions entre parenthèses correspondent aux espérances des lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2. On a donc simplement

$$E(N) = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad E(N^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2P(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\left(\frac{1}{2}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} + \frac{1}{2}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^k}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^k}{k!}\right).
\end{aligned}$$

La somme de gauche est égale à $E(X^2)$ si X suit une loi de Poisson de paramètre λ_1. Or $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \lambda_1 + \lambda_1^2$. De même la somme de droite sera égale à $\lambda_2 + \lambda_2^2$. Ainsi

$$E(N^2) = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_1^2) + \frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_2^2) = \frac{\lambda_1+\lambda_1^2+\lambda_2+\lambda_2^2}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad V(N) &= E(N^2) - E(N)^2 = \frac{\lambda_1+\lambda_1^2+\lambda_2+\lambda_2^2}{2} - \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\lambda_1+\lambda_1^2+\lambda_2+\lambda_2^2}{2} - \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2+2\lambda_1\lambda_2}{4} \\
&= \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + \frac{2\lambda_1^2+2\lambda_2^2}{4} - \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2+2\lambda_1\lambda_2}{4} \\
&= \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2}{4} \\
&= \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + \left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

- Si N suivait une loi de Poisson, on aurait $E(N) = V(N)$, ce qui n'est pas le cas (car $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Exercice 3

1. X compte le nombre de "succès" (résultat pair) lors de la réalisation de n expériences indépendantes et identiques ; la probabilité de succès étant de $\frac{1}{2}$. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. De même Y compte le nombre de fois que l'on obtient un résultat inférieur ou égal à 3 (probabilité de succés $\frac{1}{2}$ aussi) ; donc Y suit aussi la loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

2. $[X=0]\cap[Y=0]$ ="il n'y a aucun résultat pair et aucun résultat inférieur ou égal à 3"="le dé est toujours tombé sur 5". Donc $P(X=0,Y=0)=\left(\frac{1}{6}\right)^n$. Si X et Y sont indépendantes, on doit avoir en particulier $P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)$. Or $P(X=0)=P(Y=0)=(\frac{1}{2})^n$, donc $P(X=0)P(Y=0)=(\frac{1}{4})^n$, ce qui n'est pas égal à $P(X=0,Y=0)$. Donc X et Y ne sont pas indépendantes.
3. On a une seule expérience ; X peut donc prendre les valeurs 0 ou 1 ; de même pour Y. La loi du couple (X,Y) est donnée par les probabilités suivantes :
$\bullet P(X=0,Y=0)\frac{1}{6}$,
$\bullet P(X=1,Y=0)=P(Y=0)-P(X=0,Y=0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$,
$\bullet P(X=0,Y=1)=P(X=0)-P(X=0,Y=0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$,
$\bullet P(X=1,Y=1)=P(X=1)-P(X=1,Y=0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.
On rassemble ces résultats dans un tableau :

Y \ X	0	1
0	$P(X=0,Y=0)=\frac{1}{6}$	$P(X=1,Y=0)=\frac{1}{3}$
1	$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{3}$	$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{6}$

Exercice 4

1.

$$\bullet\quad E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n}(E(X_1)+\cdots+E(X_n)) \qquad \text{(linéarité de l'espérance)}$$
$$= \frac{1}{n}(\mu+\cdots+\mu)=\mu.$$

$$\bullet\quad V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n^2}V(X_1+\cdots+X_n)$$
$$= \frac{1}{n^2}(V(X_1)+\cdots+V(X_n)) \qquad \text{(car les } X_i \text{ sont indépendantes)}$$
$$= \frac{1}{n^2}(\sigma^2+\cdots+\sigma^2)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}.$$

2.

$$E((\bar{X}_n-\mu)^2)=E((\bar{X}_n-E(\bar{X}_n))^2)=V(\bar{X}_n)=\frac{\sigma^2}{n},$$

donc $E((\bar{X}_n-\mu)^2)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui signifie que $\bar{X}_n$ converge vers μ en moyenne quadratique. C'est une version de la **loi des grands nombres**.
3. Les X_i sont indépendantes, toutes de même loi, et leurs espérances et variances sont bien définies. On peut donc appliquer le théorème central limite : $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n-\mu)$ converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$; et donc $\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)$ converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On peut donc approcher la loi de $\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu)$ par la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.
4. N compte le nombre de "succès" (où succès=jour de pluie) lors de la répétition de 365 expériences indépendantes et de même probabilité de succès $p=1/3$. Donc N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(365,1/3)$. On a donc $E(N)=np=\frac{365}{3}$ et $V(N)=np(1-p)=\frac{730}{9}$.
5. On note $X_i=1$ s'il pleut le jour i, et 0 sinon. Les X_i sont alors des variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p, et $N=X_1+\cdots+X_n$ puisque N compte le nombre de jours de pluie.

6. On a $N = X_1 + \cdots + X_n = n\bar{X}_n$, donc

$$P(N \leq 110) = P(n\bar{X}_n \leq 110) = P\left(\bar{X}_n \leq \frac{110}{n}\right) = P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{110}{n} - \mu\right)\right).$$

Or $n = 365$, $\mu = E(X_i) = p = \frac{1}{3}$ et $\sigma^2 = V(X_i) = p(1-p) = \frac{2}{9}$, donc

$$\begin{aligned} P(N \leq 110) &= P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \leq \frac{\sqrt{365}}{\sqrt{\frac{2}{9}}}\left(\frac{110}{365} - \frac{1}{3}\right)\right) \\ &= P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \leq \frac{-35}{\sqrt{730}}\right) \simeq P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \leq -1.30\right). \end{aligned}$$

Donc $P(N \leq 110) \simeq F(-1.30)$, où F est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. D'après le graphique, on trouve $P(N \leq 110) \simeq 0.1$.