

Introduction aux probabilités - Licence MIA
Contrôle continu du 18/11/2009 - Durée : 1 h 30

Exercice 1 On veut évaluer les risques de décès pour un nouveau type de grippe, appelée grippe B. On a établi les faits suivants concernant la grippe B et la grippe saisonnière classique.

- la proportion de cas de grippe B parmi l'ensemble des cas de grippe (B ou saisonnière) est de 0.6 ;
- la probabilité de décès d'un patient atteint de grippe est de 0.002 ;
- la probabilité de décès d'un patient atteint de grippe saisonnière est de 0.001.

On suppose de plus qu'une personne ne peut être contaminée à la fois par la grippe B et la grippe saisonnière.

Déduire des données précédentes la probabilité qu'une personne décède sachant qu'elle a la grippe B.

Exercice 2 Une urne contient deux boules vertes et une boule rouge. On tire une boule au hasard de l'urne. Si elle est rouge on la remet dans l'urne ; sinon on la met de côté. Puis on tire une seconde boule de l'urne.

1. Quelle est la probabilité que cette deuxième boule soit rouge ?
2. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la deuxième est rouge ?

A présent, on reprend la situation initiale (deux boules vertes et une boule rouge), et on effectue plusieurs tirages successifs en appliquant la même règle : à chaque tirage, si la boule tirée est rouge on la remet dans l'urne ; sinon on la met de côté. On note X le rang d'apparition de la première boule rouge et Y le rang d'apparition de la première boule verte.

3. Quelles sont les valeurs possibles pour X ? Calculer la loi de X .
4. Quelles sont les valeurs possibles pour Y ? Quelle est la loi de Y ?

Exercice 3 Dans un laboratoire de biologie, on s'intéresse au développement d'une colonie de bactéries. Au début de l'expérience, on dispose de n bactéries et on considère que pour tout i ($1 \leq i \leq n$), la durée de vie X_i de la $i^{\text{ème}}$ bactérie est modélisée par une loi exponentielle de paramètre λ . Les variables X_i sont supposées indépendantes. Si une bactérie a survécu jusqu'au temps t_0 , elle atteint la maturité et peut se reproduire par division.

1. Rappeler l'expression de la fonction densité f_{X_i} de la loi exponentielle de paramètre λ .
2. Montrer que la probabilité que la $i^{\text{ème}}$ bactérie survive jusqu'au temps t_0 est égale à $p = e^{-\lambda t_0}$.

Les questions 3 à 5 peuvent se traiter sans avoir répondu aux questions 1 et 2.

3. Calculer la probabilité qu'au moins une des n bactéries survive jusqu'au temps t_0 .
4. Soit N le nombre de bactéries qui ont survécu jusqu'à t_0 . Quelle est la loi de N ?
5. On considère que la colonie est viable si le nombre moyen de bactéries restant au temps t_0 est supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$. Exprimer la condition pour que la colonie soit viable en fonction de λ et t_0 .