

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen de deuxième session - 9 juin 2010 - Durée : 1 heure 30

Epreuve sans document. Toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires dont les lois sont données par

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= 0.6 & P(Y = 1) &= 0.4 \\ P(X = 2) &= 0.2 & P(Y = 2) &= 0.5 \\ P(X = 3) &= 0.2 & P(Y = 3) &= 0.1 \end{aligned}$$

1. La loi du couple (X, Y) est donnée par l'un des tableaux suivants. Lequel ?

	A	B	C	D																																																																																																																								
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: none;"></td><td style="border: none;">x</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">y</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;"></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">1</td><td>0.5</td><td>0</td><td>0.1</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">2</td><td>0.2</td><td>0.1</td><td>0</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">3</td><td>0.1</td><td>0</td><td>0</td><td style="border: none;"></td></tr> </table>		x				y						1	2	3		1	0.5	0	0.1		2	0.2	0.1	0		3	0.1	0	0		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: none;"></td><td style="border: none;">x</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">y</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;"></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">1</td><td>0.5</td><td>0</td><td>0.1</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">2</td><td>0</td><td>0.1</td><td>0</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">3</td><td>0.1</td><td>0</td><td>0</td><td style="border: none;"></td></tr> </table>		x				y						1	2	3		1	0.5	0	0.1		2	0	0.1	0		3	0.1	0	0		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: none;"></td><td style="border: none;">x</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">y</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;"></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">1</td><td>0.2</td><td>0.1</td><td>0.1</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">2</td><td>0.3</td><td>0.1</td><td>0.1</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">3</td><td>0.1</td><td>0</td><td>0</td><td style="border: none;"></td></tr> </table>		x				y						1	2	3		1	0.2	0.1	0.1		2	0.3	0.1	0.1		3	0.1	0	0		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: none;"></td><td style="border: none;">x</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">y</td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;"></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td style="border: none;"></td></tr> <tr><td style="border: none;">3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td style="border: none;"></td></tr> </table>		x				y						1	2	3		1	1	0	0		2	0	1	0		3	0	0	1	
	x																																																																																																																											
y																																																																																																																												
	1	2	3																																																																																																																									
1	0.5	0	0.1																																																																																																																									
2	0.2	0.1	0																																																																																																																									
3	0.1	0	0																																																																																																																									
	x																																																																																																																											
y																																																																																																																												
	1	2	3																																																																																																																									
1	0.5	0	0.1																																																																																																																									
2	0	0.1	0																																																																																																																									
3	0.1	0	0																																																																																																																									
	x																																																																																																																											
y																																																																																																																												
	1	2	3																																																																																																																									
1	0.2	0.1	0.1																																																																																																																									
2	0.3	0.1	0.1																																																																																																																									
3	0.1	0	0																																																																																																																									
	x																																																																																																																											
y																																																																																																																												
	1	2	3																																																																																																																									
1	1	0	0																																																																																																																									
2	0	1	0																																																																																																																									
3	0	0	1																																																																																																																									

2. Quel serait le tableau de la loi du couple (X, Y) si les variables X et Y étaient indépendantes ?
3. Parmi les autres tableaux, déterminer lesquels peuvent correspondre à la loi d'un couple de variables. Lorsque c'est le cas, donner les lois marginales correspondantes.

Exercice 2 Soient X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$ et Y une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $q \in [0, 1]$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. Rappeler les expressions des lois de X et Y .
2. Calculer $P(X \leq k)$ pour tout entier $k \geq 1$.
3. Calculer $P(X \leq k, Y = k)$ pour tout entier $k \geq 1$.
4. En déduire $P(X \leq Y)$.
5. Ecrire en langage R une fonction `Simul = fonction(p,q,n)` qui simule n variables X_i de même loi que X et n variables Y_i de même loi que Y , toutes indépendantes ; et renvoie le nombre de fois où $X_i \leq Y_i$, divisé par n . Que doit-on observer si l'on utilise cette fonction avec n très grand ? Justifier votre réponse en citant le théorème du cours approprié.

Exercice 3 Dans un troupeau de moutons contaminé par une maladie, la probabilité qu'un mouton pris au hasard ait la maladie est de 0.2. Un test de dépistage de cette maladie possède les caractéristiques suivantes : si l'animal est malade, le test est positif avec probabilité 0.9 ; s'il est sain, le test est négatif avec probabilité 1.

1. Calculer la probabilité que le mouton soit malade si son test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit sain si son test est négatif.
2. On effectue à présent le dépistage successivement sur n moutons du troupeau. On suppose que tous les moutons sont indépendants vis-à-vis de la maladie et vis-à-vis du résultat du test. Quelle est la probabilité que les n moutons soient sains si tous les tests sont négatifs ?

On se place à présent dans une nouvelle situation : on ne sait pas si le troupeau est contaminé ou non. Il y a en fait une chance sur deux que le troupeau soit contaminé. S'il est contaminé, un mouton pris au hasard est malade avec probabilité 0.2. Si le troupeau n'est pas contaminé, aucun mouton n'a la maladie.

3. Quelle est la probabilité que le troupeau soit contaminé si le test d'un mouton pris au hasard est négatif?
4. Quelle est la probabilité p que le troupeau soit contaminé si n tests successifs sont négatifs ? Combien de tests doit-on effectuer pour que la probabilité p soit inférieure à 0.01 ? (*on donne $\log_{10}(99)/\log_{10}(0.82) \simeq -23.2$*)