Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen du 19/01/2012 - Correction

Exercice 1 Notons A l'événement "la personne est atteinte de la maladie", et T l'événement "le test est positif". Les hypothèses de l'énoncé se traduisent par

$$P(T|A) = 0.9, \qquad P(T|A^c) = 0.1, \qquad P(A) = 0.1.$$

La probabilité demandée est $P(A|T)$. On l'obtient par la règle de Bayes :

$$P(A|T) = \frac{P(T|A)P(A)}{P(T|A)P(A) + P(T|A^c)P(A^c)} = \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + 0.1 \times 0.9}.$$

On obtient donc $P(A|T) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 Dans la suite on notera D_1 le résultat du premier lancer et D_2 le résultat du deuxième lancer.

1. On doit calculer $P(X = x, Y = y)$ pour tous x et y dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Or
   - Si $x > y$ on a $P(X = x, Y = y) = 0$: en effet le plus petit résultat ne peut pas être strictement supérieur au plus grand.

   - Si $x = y$ on a $P(X = x, Y = y) = \frac{1}{36}$: en effet l'événement $[X = x, Y = y]$ correspond à l'événement "les deux dés tombent sur x", c'est-à-dire à $[D_1 = x, D_2 = x]$, dont la probabilité est

     $$P(D_1 = x, D_2 = x) = P(D_1 = x)P(D_2 = x) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

     car les deux lancers sont indépendants.

   - Si $x < y$ on a $P(X = x, Y = y) = \frac{1}{18}$: en effet l'événement $[X = x, Y = y]$ correspond alors à l'événement "(le premier dé tombe sur x et le deuxième sur y) ou (le premier dé tombe sur y et le deuxième sur x)", soit encore $([D_1 = x] \cap [D_2 = y]) \cup ([D_1 = y] \cap [D_2 = x])$. On a donc

     $$\begin{aligned} P(X = x, Y = y) &= P(([D_1 = x] \cap [D_2 = y]) \cup ([D_1 = y] \cap [D_2 = x])) \\ &= P([D_1 = x] \cap [D_2 = y]) + P([D_1 = y] \cap [D_2 = x]) \quad \text{(événements disjoints),} \\ &= P(D_1 = x)P(D_2 = y) + P(D_1 = y)P(D_2 = x) \quad \text{(événements indépendants)} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

   Finalement on peut remplir le tableau de la loi du couple (X, Y) :

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

Les lois marginales s'obtiennent en faisant la somme sur les lignes et les colonnes du tableau. On obtient donc pour la loi de X :

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

et pour la loi de Y :

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

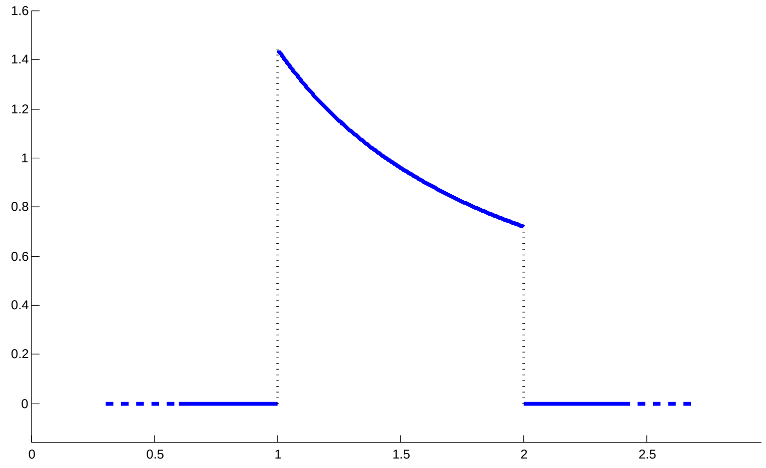
2. Si X et Y étaient indépendantes, on aurait $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ pour tous x, y dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On voit tout de suite que ce n'est pas le cas : par exemple $P(X = 2, Y = 1) = 0 \neq P(X = 2)P(Y = 1) = \frac{9}{36} \times \frac{1}{36}$. Donc X et Y ne sont pas des variables indépendantes.

Exercice 3

1. On obtient la valeur de a en écrivant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{1}^{2} \frac{a}{t}dt = [a \ln(t)]_1^2 = a(\ln(2) - \ln(1)) = a \ln(2),$$

donc $a = \dfrac{1}{\ln(2)}$.



2.

$$\bullet P\left(1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \int_1^{\frac{3}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln(2)}[\ln(t)]_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\ln(2)} \left(\ln(3/2) - \ln(1)\right),$$

d'où

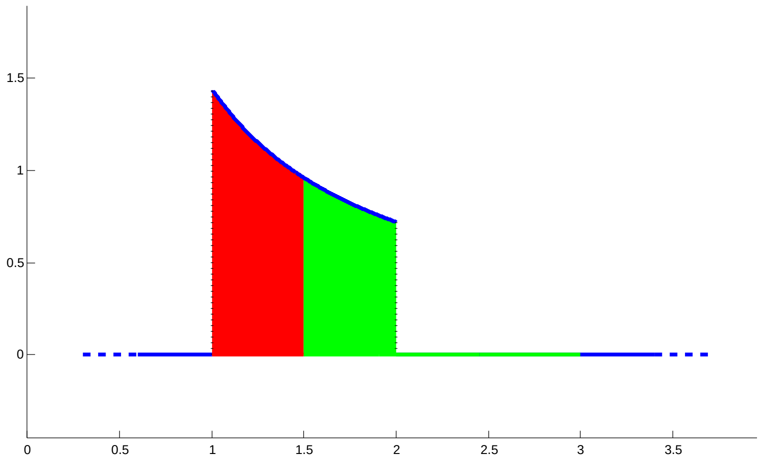
$$P\left(1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \frac{\ln(3) - \ln(2)}{\ln(2)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 1.$$

$$\bullet P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 3\right) = \int_{\frac{3}{2}}^{3} f(t)dt = \frac{1}{\ln(2)} \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln(2)}[\ln(t)]_{\frac{3}{2}}^{2} = \frac{1}{\ln(2)} \left(\ln(2) - \ln(3/2)\right),$$

d'où

$$P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 3\right) = \frac{2\ln(2) - \ln(3)}{\ln(2)} = 2 - \frac{\ln(3)}{\ln(2)}.$$

Les probabilités calculées correspondent aux aires sous la courbe de la fonction densité f, représentées en rouge et en vert ci-dessous :



3.
$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=\frac{1}{\ln(2)}\int_1^2 t\times\frac{1}{t}dt=\frac{1}{\ln(2)}\int_1^2 dt=\frac{1}{\ln(2)}[t]_1^2,$$

d'où $E(X)=\dfrac{1}{\ln(2)}$.

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2)-E(X)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2f(t)dt-\frac{1}{\ln(2)^2}\\ &= \frac{1}{\ln(2)}\int_1^2 t^2\times\frac{1}{t}dt-\frac{1}{\ln(2)^2}=\frac{1}{\ln(2)}\int_1^2 tdt-\frac{1}{\ln(2)^2}\\ &= \frac{1}{\ln(2)}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2-\frac{1}{\ln(2)^2}=\frac{1}{\ln(2)}\left(\frac{2^2-1^2}{2}\right)-\frac{1}{\ln(2)^2},\end{aligned}$$

d'où $V(X)=\dfrac{3}{2\ln(2)}-\dfrac{1}{\ln(2)^2}$.

Exercice 4

1. La loi exponentielle de paramètre λ est donnée par la fonction de densité

$$g(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Son espérance vaut $\frac{1}{\lambda}$.

2. Les variables X_i sont indépendantes et toutes de mêmes lois ; de plus leur loi commune (la loi exponentielle de paramètre λ) admet une espérance. Par conséquent la loi des grands nombres s'applique pour les variables X_i : la moyenne empirique $\bar{X}_n$ converge en moyenne vers l'espérance $\frac{1}{\lambda}$. Autrement dit $\bar{X}_n$ est un estimateur convergeant en moyenne vers $\frac{1}{\lambda}$ (la fonction demandée f vaut donc $f(\lambda) = 1/\lambda$).
On admet que $L_n = f^{-1}(\bar{X}_n) = \frac{1}{\bar{X}_n}$ est un estimateur convergeant de λ.

3. Les variables X_i sont indépendantes et toutes de mêmes lois ; de plus leur loi commune (la loi exponentielle de paramètre λ) admet une espérance et une variance. Par conséquent le théorème central limite s'applique pour les variables X_i : pour tout $a \leq b$ réels, $P\left(a \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X}_n - \mu) \leq b\right)$ converge vers $P(a \leq Z \leq b)$, avec $\mu = E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma = \sqrt{V(X_i)} = \frac{1}{\lambda}$, et où Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. En prenant $a = -1.96$ et $b = 1.96$ on en déduit que pour n grand,

$$P\left(-1.96 \leq \lambda\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \leq 1.96\right) \simeq 0.95,$$

soit encore

$$P\left(-1.96 \leq \lambda\sqrt{n}\bar{X}_n - \sqrt{n} \leq 1.96\right) \simeq 0.95,$$

$$P\left(-\frac{1.96}{\sqrt{n}} \leq \lambda\bar{X}_n - 1 \leq \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0.95,$$

$$P\left(-\frac{1.96}{\sqrt{n}} + 1 \leq \lambda\bar{X}_n \leq \frac{1.96}{\sqrt{n}} + 1\right) \simeq 0.95,$$

$$P\left(\left(-\frac{1.96}{\sqrt{n}} + 1\right) L_n \leq \lambda \leq \left(\frac{1.96}{\sqrt{n}} + 1\right) L_n\right) \simeq 0.95,$$

$$P\left(L_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}} L_n \leq \lambda \leq L_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}} L_n\right) \simeq 0.95,$$

et l'intervalle de confiance demandé est donc $\left[L_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}} L_n \ , \ L_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}} L_n\right]$. On peut aussi l'écrire sous la forme suivante :

$$P\left(|\lambda - L_n| \leq \frac{1.96}{\sqrt{n}} L_n\right) \simeq 0.95.$$