Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen du 19/01/2012 - Durée : 1 heure 30

Exercice 1 On dispose d'un test de détection d'une maladie possédant les caractéristiques suivantes : si une personne est atteinte le test a 90% de chances d'être positif ; si la personne est saine le test a 10% de chances d'être positif. On suppose qu'une personne prise au hasard dans la population a 10% de chances d'être atteinte de cette maladie.

1. Calculer la probabilité qu'une personne prise au hasard soit atteinte de la maladie si son test est positif.

On réalise a présent une deuxième fois le même test de détection sur la même personne ; et on suppose que les résultats des deux tests sont indépendants conditionnellement au fait que la personne est saine ou atteinte de la maladie.

2. Calculer la probabilité que les deux tests soient positifs sachant que la personne est atteinte de la maladie. Calculer la probabilité que les deux tests soient positifs sachant que la personne est saine.
3. Calculer la probabilité que la personne soit atteinte de la maladie sachant que ses deux tests sont positifs.

Exercice 2 On lance deux fois un dé à six faces. Les deux lancers sont supposés indépendants. On note X le plus petit résultat obtenu et Y le plus grand.

1. Calculer la loi du couple (X, Y) et présenter le résultat sous forme d'un tableau. En déduire les lois marginales (lois de X et Y).
2. X et Y sont-elles des variables indépendantes ?

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par la fonction de densité

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{t} \text{ si } t \in [1, 2], \\ \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

où a est une constante réelle.

1. Déterminer la valeur de a et représenter la fonction f sur un graphique.
2. Calculer les valeurs de $P(1 \leq X \leq \frac{3}{2})$ et $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 3)$ et donner l'interprétation graphique de ces quantités.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 4 Un nombre n de composants électroniques sont mis en fonctionnement à la date 0 et on note X_i la date, comptée en années, à laquelle le $i^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On suppose que les X_i sont indépendants et suivent tous la même loi exponentielle de paramètre inconnu $\lambda > 0$. On note $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ la moyenne empirique des X_i.

1. Rappeler la définition de la loi exponentielle de paramètre λ, et la valeur de son espérance.
2. Vérifier que la loi des grands nombres s'applique pour les variables X_i et en déduire que $\bar{X}_n$ est un estimateur convergeant de $f(\lambda)$ pour une fonction f à déterminer. On admettra que $L_n = f^{-1}(\bar{X}_n)$ est un estimateur convergeant de λ.

3. Vérifier que le théorème central limite s'applique pour les variables X_i, et en déduire un intervalle de confiance au niveau $1-0.05$ pour l'estimateur L_n. On rappelle que $P(-1.96 \leq X \leq 1.96) \simeq 0.95$ pour $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

On suppose à présent que l'on ne peut pas savoir quand les composants électroniques tombent en panne, mais seulement s'ils fonctionnent toujours au bout d'un an. On note Y_i la variable égale à 1 si le $i^{\text{ème}}$ appareil fonctionne toujours au bout d'un an, et 0 sinon.

4. Calculer la probabilité $P(Y_i = 1)$ pour un indice i quelconque. Quelle est la loi de Y_i ?
5. Vérifier que la loi des grands nombres s'applique pour les variables Y_i, puis procéder de la même manière qu'à la question 2 pour trouver un autre estimateur L'_n du paramètre λ. A votre avis lequel de ces deux estimateurs est le plus précis ?
6. Procéder comme à la question 3 pour obtenir un intervalle de confiance au niveau $1-0.05$ pour l'estimateur L'_n. Comparer les deux intervalles obtenus.