

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen partiel du 16/11/2011 - Durée : 1 heure 30

Exercice 1 On fait avancer un pion sur un petit jeu composé de 5 cases alignées : une case "Départ", puis trois cases a, b, c, et enfin une dernière case "Arrivée". Le pion se trouve initialement sur la case "Départ". A chaque coup on lance un dé à 6 faces et on fait avancer le pion du nombre de cases correspondant. Le jeu s'arrête lorsque le pion a atteint ou dépassé la case "Arrivée".

Départ	a	b	c	Arrivée
--------	---	---	---	---------

On note A_i l'événement "le pion se trouve sur la case a à l'issue du $i^{\text{ème}}$ coup" ; et similairement les événements B_i et C_i .

1. Calculer la probabilité que le pion s'arrête sur la case c au cours du jeu.
2. On note N le nombre de coups nécessaire pour finir le jeu. Déterminer la loi de N .

Exercice 2 On dispose de deux dés à 6 faces, l'un rouge et l'autre vert, que l'on lance ensemble plusieurs fois de suite. On note X le rang d'apparition du premier 6 sur le dé rouge, Y le rang d'apparition du premier 6 sur le dé vert.

1. Quelles sont les lois de X et Y ? Donner ou calculer les valeurs de $P(X = n)$ et $P(Y > n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. Déterminer $P(X = Y | X = n)$ pour tout entier $n \geq 1$, et en déduire $P(X = Y)$.
3. Soit $Z = \min(X, Y)$. Interpréter la variable Z en termes de rang d'apparition. Quelle est la loi suivie par Z ? Donner la valeur de $P(Z = n)$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 3 Un fichier informatique vidéo est composé de 10^9 bits (valeurs 0 ou 1). Lors de la transmission de ce fichier sur un réseau, il peut se produire des erreurs : on considère que la valeur de chaque bit peut être modifiée avec probabilité p très faible, et que tous ces événements sont indépendants. On suppose de plus que plus la transmission est rapide, plus il y a d'erreurs ; de sorte qu'il est possible d'ajuster la valeur de p en réglant la vitesse de transmission. Pour cela on cherche à satisfaire les deux critères suivants :

- (1) La proportion de bits erronés doit être en moyenne inférieure à 10^{-6} .
 - (2) La probabilité de ne faire aucune erreur dans l'en-tête du fichier (formé des 1000 premiers bits) doit être supérieure à $1 - \alpha$, avec $\alpha = 10^{-4}$.
1. On note X le nombre d'erreurs. Quelle est la loi exacte de X ? Par quelle loi peut-on l'approcher au vu des données du problème ? Exprimer la condition (1) comme une condition sur X , puis l'écrire en fonction de p .
 2. Exprimer la condition (2) en fonction de p (on fera un développement à l'ordre 1 en α du résultat afin d'obtenir une valeur approchée simple).
 3. Déterminer la valeur maximale acceptable pour p .

Exercice 4 Soit X une variable de loi uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$.

1. Rappeler l'expression de la fonction densité f_X de la variable X . Que vaut l'espérance $E(X)$?
2. Calculer la fonction de répartition de X .
3. Calculer la variance de X .