Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

PARIS DESCARTES

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen partiel du 16/11/2011 - Correction

Exercice 1

1. Le pion peut s'arrêter sur la case c au premier, deuxième ou troisième coups, car le jeu est terminé après 4 coups. On a donc $E = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, et cette union est disjointe car le pion ne peut s'arrêter sur cette case qu'une seule fois. Donc $P(E) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)$.
Ensuite on a :
• $P(C_1) = 1/6$ (le pion arrive sur la case c si le premier lancer vaut 3 : une chance sur 6).
• Pour calculer $P(C_2)$ on remarque que pour que le pion arrive sur la case c au 2e coup il fallait qu'il soit en a ou b au 1er coup. Donc $P(C_2) = P(C_2|A_1)P(A_1) + P(C_2|B_1)P(B_1)$, avec $P(C_2|A_1) = 1/6$ (probabilité que le 2e dé tombe sur 1),
$P(A_1) = 1/6$ (probabilité que le 1er dé tombe sur 2),
$P(C_2|B_1) = 1/6$ (probabilité que le 2e dé tombe sur 1),
$P(B_1) = 1/6$ (probabilité que le 1er dé tombe sur 2).
Donc $P(C_2) = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{1}{18}$.
• Pour que le pion arrive sur la case c au 3e coup il fallait qu'il soit en b au 2e coup, et donc en a au 1er coup. Donc $P(C_3) = P(C_3|B_2)P(B_2) = P(C_3|B_2)P(B_2|A_1)P(A_1) = \frac{1}{6^3}$ (le dé doit tomber sur 1 à chaque fois).
Finalement $P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6^3} = \frac{49}{6^3}$.

2. Le jeu peut se terminer en 1, 2, 3 ou 4 coups. Donc le support de N est $\{1, 2, 3, 4\}$.
• $P(N=1) = \frac{1}{2}$ (probabilité que le 1er dé tombe sur 4, 5 ou 6).
• $P(N=2) = P(N=2|A_1)P(A_1) + P(N=2|B_1)P(B_1) + P(N=2|C_1)P(C_1)$.
Or $P(A_1) = P(B_1) = P(C_1) = \frac{1}{6}$, et
$P(N=2|A_1) = 4/6$ (le dé tombe sur 3,4,5 ou 6 au 2e coup),
$P(N=2|B_1) = 5/6$ (le dé tombe sur 2,3,4,5 ou 6 au 2e coup),
$P(N=2|C_1) = 1$.
Donc $P(N=2) = \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.
• $P(N=3) = P(N=3|B_2)P(B_2) + P(N=3|C_2)P(C_2)$ (le pion était en b ou c au 2e coup).
Or $P(N=3|B_2) = 5/6$, et
$P(B_2) = P(B_2|A_1)P(A_1) = \frac{1}{6^2}$,
$P(N=3|C_2) = 1$,
$P(C_2) = P(C_2|A_1)P(A_1) + P(C_2|B_1)P(B_1) = 2 \times (1/6)^2$.
Donc $P(N=3) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6^2} + 1 \times 2 \times (1/6)^2 = \frac{17}{6^3}$.
• $P(N=4) = P(N=4|C_3)P(C_3) = P(N=4|C_3)P(C_3|B_2)P(B_2)$
donc $P(N=4) = P(N=4|C_3)P(C_3|B_2)P(B_2|A_1)P(A_1)$, et on a $P(N=4|C_3) = 1$ et $P(C_3|B_2) = P(B_2|A_1) = P(A_1) = 1/6$. Donc $P(N=4) = (1/6)^3$.

Exercice 2

1. X correspond au rang de première réalisation d'un événement de probabilité 1/6 lors de la répétition d'expériences identiques et indépendantes (jets du dé rouge). Donc X suit

la loi géométrique de paramètre $p = 1/6$. Même raisonnement pour Y avec le dé vert : Y suit aussi la loi géométrique de paramètre $1/6$. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$P(X = n) = p(1-p)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

Ensuite $P(Y > n)$ peut se calculer en faisant la somme des $P(Y = k)$ pour k allant de $n+1$ à l'infini, mais le plus simple est de voir que $P(Y > n)$ correspond à la probabilité que le 6 ne soit jamais tombé aux n premiers coups. Donc

$$P(Y > n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n}.$$

2. On a d'abord $P(X = Y|X = n) = P(Y = n|X = n)$ (si $X = n$, le fait que $X = Y$ est identique au fait que $Y = n$). Ensuite $P(Y = n|X = n) = P(Y = n)$ car les événements $[Y = n]$ et $[X = n]$ sont indépendants (ils se réfèrent à des séries de lancers de dés indépendantes). Donc $P(X = Y|X = n) = P(Y = n) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{n-1}$.
Pour calculer $P(X = Y)$, on décompose en conditionnant selon les événements $[X = n]$:

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X = Y|X = n)P(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} = \frac{1}{6^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5^2}{6^2}\right)^{n} = \frac{1}{6^2}\frac{1}{1-\frac{5^2}{6^2}} = \frac{1}{6^2}\frac{6^2}{11} = \frac{1}{11}.$$

3. Z correspond au rang de première apparition du fait d'obtenir au moins un 6 lors du jet des deux dés. Or la probabilité d'obtenir au moins un 6 lors du jet des deux dés vaut $1 - (\frac{5}{6})^2$ (1 moins la probabilité de n'obtenir 6 ni au dé rouge ni au dé vert). Donc Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - (\frac{5}{6})^2 = \frac{11}{36}$:

$$P(Z = n) = \frac{11}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}.$$

Exercice 3

1. X correspond au nombre de réalisations d'un événement de probabilité p (la modification d'un bit), en répétant 10^9 fois cet événement de manière indépendante. Donc X suit la loi binomiale de paramètres 10^9 et p.
Or 10^9 est très grand et p très petit d'après l'énoncé donc on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10^9 p$.
Interprétation de la condition (1) : le nombre de bits erronés moyen correspond à l'espérance $E(X)$, donc la proportion moyenne de bits erronés est égale à $\frac{E(X)}{10^9} = 10^{-9}E(X)$. La condition (1) s'écrit donc $10^{-9}E(X) < 10^{-6}$. Or $E(X) = 10^9 p$, donc finalement la condition devient $p < 10^{-6}$.
2. La probabilité de ne faire aucune erreur dans les 1000 premiers bits est égale à $(1-p)^{1000}$. La condition (2) s'écrit donc

$$(1-p)^{1000} > 1-\alpha \Leftrightarrow 1-p > (1-\alpha)^{1/1000} = (1-\alpha)^{10^{-3}}.$$

En utilisant le développement $(1+\alpha)^r = 1 + r\alpha + o(\alpha)$, on obtient la condition approchée $1 - p > 1 - 10^{-3}\alpha = 1 - 10^{-7}$, soit $p < 10^{-7}$.

3. Au final pour satisfaire les deux conditions on doit prendre $p < min(10^{-6}, 10^{-7}) = 10^{-7}$.

Exercice 4

1.
$$f_X(t) = \left\{ \tfrac{1}{2} \text{ si } t < -1 \text{ ou } t > 1, 0 \text{ sinon.} \right.$$

$E(X) = \frac{1+(-1)}{2} = 0$ d'après la formule pour une loi uniforme ; ou sinon par le calcul :

$$E(X) = \int_{\infty}^{\infty} tf(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} tdt = \frac{1}{2}[\frac{t^2}{2}]_{-1}^{1} = 0.$$

2.
$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(u)du = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0, \\ \frac{1}{2}\int_{-1}^{t} du = \frac{t+1}{2} \text{ si } -1 \leq t \leq 1, \\ \int_{-1}^{1} f_X(u)du = 1 \text{ si } t > 1. \end{cases}$$

3.
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - 0^2 = E(X^2).$$
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{1}{2}[\frac{t^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\frac{1^3 - (-1)^3}{3} = \frac{1}{3}.$$
$$V(X) = \frac{1}{3}.$$