Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

PARIS DESCARTES

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen de 2e session - 12/06/2012 - Durée : 1 heure 30

Exercice 1 Une usine fabrique des bouteilles en plastique. En une journée 10000 bouteilles sont fabriquées. On suppose que chaque bouteille fabriquée a une probabilité $p = 10^{-5}$ d'être défectueuse, indépendamment de l'état des autres bouteilles.

1. On note N le nombre de bouteilles défectueuses à la fin d'une journée. Quelle est la loi de N ? Donner l'expression de $P(N = k)$ pour tout entier k. Combien de bouteilles en moyenne sont défectueuses ?
2. Par quelle autre loi classique peut-on approcher la loi de N ? Expliquer pourquoi. Donner l'expression approchée de $P(N = k)$ correspondante.
3. On suppose qu'en augmentant la qualité des matières premières utilisées, on peut diminuer la probabilité p. Quelle valeur p doit-on obtenir pour être certain à 95% qu'aucune bouteille ne sera défectueuse à la fin d'une journée ?

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de α, puis représenter le graphe de la fonction f.
2. Calculer $P(-1 \leq X \leq \frac{1}{2})$, $P(X = \frac{1}{2})$ et $P(X \geq \frac{3}{4})$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3 Un vacancier rentre de la plage. En arrivant à sa voiture il s'aperçoit qu'il a perdu sa montre. Il a pu la perdre en deux endroits : sur la plage ou sur le chemin qui y mène. Le vacancier a peu de temps pour revenir la chercher et il doit choisir entre :

- la chercher sur la plage où elle est tombée avec probabilité 90% mais où il n'a qu'une chance sur 4 de la retrouver si elle y est.
- la chercher sur le chemin où elle a peu de chance d'être tombée mais où il a 95% de chance de la retrouver si elle y est.

1. Calculer la probabilité qu'il retrouve sa montre dans le cas où il cherche sur la plage ; puis dans le cas où il cherche sur le chemin.
2. Il a cherché la montre sur le chemin mais ne l'a pas trouvée. Quelle est à présent la probabilité qu'elle soit sur la plage ?

Exercice 4 Un joueur joue à un jeu de hasard. A chaque tour il parie une certaine somme d'argent. S'il gagne il gagne cette somme ; sinon il la perd. Autrement dit on a, en notant G_n son gain cumulé après le $n^{\text{ème}}$ coup (avec $G_0 = 0$) et M_n la somme pariée,

- $G_n = G_{n-1} + M_n$ s'il gagne, et
- $G_n = G_{n-1} - M_n$ s'il perd.

La stratégie de la *martingale classique* consiste à rejouer tant que l'on perd, en misant toujours $M_n = 1 - G_{n-1}$, et à s'arrêter si l'on gagne. Ainsi le joueur est certain de gagner 1 à la fin du jeu s'il peut miser autant d'argent qu'il le souhaite. Voici par exemple le déroulement d'une partie :

- Au premier tour il mise 1 et il perd, donc $G_1 = -1$;
- Au deuxième tour il mise 2 et il perd, donc $G_2 = -3$;
- Au troisième tour il mise 4 et il perd, donc $G_3 = -7$;
- Au quatrième tour il mise 8 et il gagne, donc $G_4 = 1$; il s'arrête de jouer.

On suppose qu'à chaque tour le joueur a une chance sur deux de gagner le tour et que les tours sont indépendants. On note N le nombre de tours nécessaire pour terminer la partie.

1. Quelle est la loi de N ? Donner l'expression de $P(N = n)$ pour tout $n \geq 1$. Quelle est l'espérance de N ?
2. M_N représente la dernière somme misée par le joueur. Calculer l'expression de M_N en fonction de N.
3. Montrer que l'espérance de M_N est infinie. Commenter.