Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

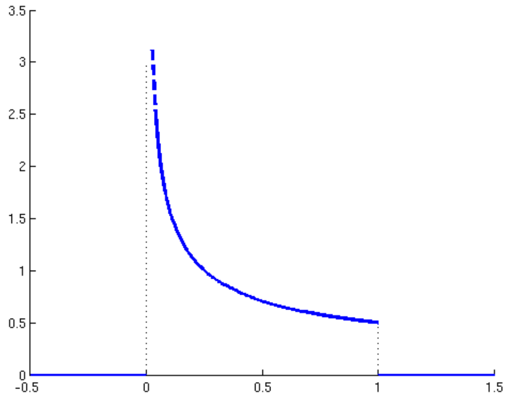
Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Correction de l'examen de 2e session du 12/06/2012

Exercice 1

1. N compte le nombre de réalisations de l'événement "la bouteille est défectueuse" lors de la répétition de $n = 10000$ expériences indépendantes. La loi de N est donc la loi binomiale de paramètres $n = 10000$ et $p = 10^{-5}$. On a, pour $0 \leq k \leq n$,
$$P(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
En moyenne le nombre de bouteilles défectueuses vaut $E(N) = np = 10000 \times 10^{-5} = 0.1$.
2. N suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec n très grand et p très petit. On peut donc approcher la loi de N par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 0.1$. On a ainsi
$$P(N = k) \simeq e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$
3. On cherche p tel que la probabilité qu'aucune bouteille soit défectueuse soit au moins égale à 0.95 ; c'est-à-dire tel que $P(N = 0) \geq 0.95$. Or
$$P(N = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n.$$
Donc
$$P(N = 0) \geq 0.95 \Leftrightarrow (1-p)^n \geq 0.95 \Leftrightarrow 1-p \geq 0.95^{1/n} \Leftrightarrow p \leq p_{min} = 1-0.95^{1/n} = 1-0.95^{10^{-4}}.$$
On peut obtenir une valeur approchée de p_{min} en utilisant le développement $(1+\alpha)^m = 1 + m\alpha + o(\alpha)$:
$$p_{min} = 1 - (1-0.05)^{10^{-4}} \simeq 1 - (1 - 10^{-4} \times 0.05) = 5.10^{-6}.$$

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

1. Pour que f soit une densité de probabilté, son intégrale doit être égale à 1. Or
$$\int_0^1 f(x)dx = \alpha \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha \left[\frac{\sqrt{x}}{1/2}\right]_0^1 = 2\alpha.$$
Donc $\alpha = 1/2$. Pour cette valeur de α f est une fonction positive dont l'intégrale vaut 1 ; c'est donc une densité de probabilité.



2.

$$
\begin{aligned}
P(-1 \leq X \leq 1/2) &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\
&= 0 + \left[\sqrt{x}\right]_{0}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \\
P(X = 1/2) &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx = 0. \\
P(X \geq 3/4) &= \int_{\frac{3}{4}}^{+\infty} f(x)\, dx \\
&= \int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{dx}{2\sqrt{x}} + \int_{1}^{+\infty} 0\, dx \\
&= \left[\sqrt{x}\right]_{\frac{3}{4}}^{1} + 0 = 1 - \sqrt{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \times x\, dx + \int_{0}^{1} \frac{x\, dx}{2\sqrt{x}} + \int_{0}^{+\infty} 0 \times x\, dx \\
&= 0 + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \sqrt{x}\, dx + 0 = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \times x^2\, dx + \int_{0}^{1} \frac{x^2\, dx}{2\sqrt{x}} + \int_{0}^{+\infty} 0 \times x^2\, dx - \frac{1}{9} \\
&= 0 + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} x^{3/2}\, dx + 0 = \frac{1}{2} \left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_{0}^{1} - \frac{1}{9} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.
\end{aligned}
$$

Exercice 3

1. Notons $A =$"la montre est sur la plage" ($P(A) = 0.9$), et $T =$"il trouve la montre".
   On cherche $P(T)$. On écrit

$$P(T) = P(T|A)P(A) + P(T|A^c)P(A^c)$$

   et on distingue les deux cas.

   - **Premier cas : il cherche sur la plage** :
     - probabilité qu'il trouve la montre sachant qu'elle est sur la plage : $P(T|A) = 1/4$
     - probabilité qu'il trouve la montre sachant qu'elle est sur le chemin : $P(T|A^c) = 0$ (puisqu'il cherche sur la plage).

     Donc dans ce cas $P(T) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + 0 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{40} = 0.225$.

   - **Deuxième cas : il cherche sur le chemin** :
     - probabilité qu'il trouve la montre sachant qu'elle est sur la plage : $P(T|A) = 0$,
     - probabilité qu'il trouve la montre sachant qu'elle est sur le chemin : $P(T|A^c) = 0.95$.

     Donc dans ce cas $P(T) = 0 \times \frac{9}{10} + 0.95 \times \frac{1}{10} = 0.095$.

2. On est dans le deuxième cas : il a cherché la montre sur le chemin ; et on cherche la probabilité que la montre soit sur la plage sachant qu'il n'a pas trouvé la montre, c'est-à-dire $P(A|T^c)$. On a

$$P(A|T^c) = \frac{P(T^c|A)P(A)}{P(T^c)} = \frac{(1 - P(T|A))P(A)}{1 - P(T)} = \frac{(1 - 0) \times 0.9}{1 - 0.095} = \frac{0.9}{0.905} = \frac{180}{181} \simeq 0.995.$$

remarque : Au lieu de considérer deux cas, on aurait pu introduire un troisième événement, à savoir $B =$"il cherche la montre sur la plage", et conditionner par rapport à B ou B^c. On aurait alors écrit pour répondre aux questions :

1. $P(T|B) = P(T|A \cap B)P(A|B) + P(T|A^c \cap B)P(A^c|B) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{10} + 0 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{40} = 0.225$,
   $P(T|B^c) = P(T|A \cap B^c)P(A|B^c) + P(T|A^c \cap B^c)P(A^c|B^c) = 0 \times \frac{9}{10} + 0.95 \times \frac{1}{10} = 0.095$.
2. $P(A|T^c \cap B^c) = \frac{P(T^c|A \cap B^c)P(A|B^c)}{P(T^c|B^c)} = \frac{(1-P(T|A \cap B^c))P(A|B^c)}{1-P(T|B^c)} = \frac{(1-0)\times 0.9}{1-0.095} = \frac{0.9}{0.905} = \frac{180}{181} \simeq 0.995$.

Exercice 4 Un joueur joue à un jeu de hasard. A chaque tour il parie une certaine somme d'argent. S'il gagne il gagne cette somme ; sinon il la perd. Autrement dit on a, en notant G_n son gain cumulé après le $n^{\text{ème}}$ coup (avec $G_0 = 0$) et M_n la somme pariée,

- $G_n = G_{n-1} + M_n$ s'il gagne, et
- $G_n = G_{n-1} - M_n$ s'il perd.

La stratégie de la *martingale classique* consiste à rejouer tant que l'on perd, en misant toujours $M_n = 1 - G_{n-1}$, et à s'arrêter si l'on gagne. Ainsi le joueur est certain de gagner 1 à la fin du jeu s'il peut miser autant d'argent qu'il le souhaite. Voici par exemple le déroulement d'une partie :

- Au premier tour il mise 1 et il perd, donc $G_1 = -1$;
- Au deuxième tour il mise 2 et il perd, donc $G_2 = -3$;
- Au troisième tour il mise 4 et il perd, donc $G_3 = -7$;
- Au quatrième tour il mise 8 et il gagne, donc $G_4 = 1$; il s'arrête de jouer.

On suppose qu'à chaque tour le joueur a une chance sur deux de gagner le tour et que les tours sont indépendants. On note N le nombre de tours nécessaire pour terminer la partie.

1. Quelle est la loi de N ? Donner l'expression de $P(N = n)$ pour tout $n \geq 1$. Quelle est l'espérance de N ?
2. M_N représente la dernière somme misée par le joueur. Calculer l'expression de M_N en fonction de N.
3. Montrer que l'espérance de M_N est infinie. Commenter.