

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen partiel du 14/11/2012 - Durée : 1 heure 30

Exercice 1 On considère un sac contenant deux boules rouges et trois boules noires, indiscernables au toucher.

1. On tire successivement une boule, **avec remise**, jusqu'à obtenir une boule rouge. On note X son rang d'apparition. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Quelle est la loi de ce rang? Que vaut $E(X)$?
2. On tire successivement une boule, **sans remise**, jusqu'à obtenir une boule rouge, et on note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang et calculer $E(X)$.

Exercice 2 On considère le jeu suivant. Un joueur lance deux dés à six faces. Soit X la plus petite des deux valeurs obtenues. Si $X = 6$, le joueur gagne 200 euros; si $X \leq 3$ il perd 10 euros; dans les autres cas il ne gagne ni ne perd d'argent. On note G le gain (positif ou négatif) réalisé.

Déterminer la loi de G et son espérance. Ce jeu est-il favorable ou défavorable au joueur?

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t^2 & \text{si } t \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de F_X .
2. Donner les valeurs de $P(X \leq 2)$, $P(X = 1)$, $P(X \leq \frac{1}{2})$, $P(-\frac{3}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$.
3. Rappeler la définition d'une variable à densité.
4. Montrer que X est une variable à densité et calculer sa fonction densité f_X .

Exercice 4 Dans un mot binaire, c'est-à-dire une suite de 0 ou 1, on appelle *k-séquence* toute suite de k 1 consécutifs n'étant ni précédée ni suivie de 1. Par exemple, le mot (110011010001110) possède une 1-séquence, deux 2-séquences et une 3-séquence.

On considère à présent un mot binaire aléatoire de longueur n : $(X_1 X_2 \dots X_n)$, les X_i étant des variables indépendantes et telles que $P(X_i = 1) = p$, où $p \in [0, 1]$ est fixé. On note alors

$A_k =$ "le mot possède au moins une k -séquence",

1. Que vaut $P(A_n)$?
2. On considère le cas $n = 4$ et $k = 2$. Combien peut-il y avoir de 2-séquences au maximum dans un mot de longueur 4? Expliquer pourquoi on a

$$P(A_2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0) \\ + P(X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 1),$$

et en déduire $P(A_2)$ en fonction de p .

3. On suppose n quelconque et $k \geq \frac{n}{2}$. Écrire une formule généralisant celle de la question précédente et en déduire la valeur de $P(A_k)$ en fonction de p, n et k . La formule est-elle aussi vraie lorsque $k < \frac{n}{2}$?