Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

PARIS DESCARTES

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Correction de l'examen partiel du 14/11/2012

Exercice 1

1. Le tirage est avec remise, donc la première boule rouge peut apparaître à n'importe quel rang. Donc l'ensemble des valeurs possibles de X est $\mathbb{N}^*$.
   La loi de X est la loi géométrique de paramètre $p = \frac{2}{5}$ (première occurrence de l'événement "tirer une boule rouge", de probabilité $\frac{2}{5}$, lors de la répétition d'expérience indépendantes).
   On a donc $P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = \frac{2}{5}(\frac{3}{5})^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$, et $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{5}{2} = 2.5$.
2. Ici le tirage est sans remise donc une boule rouge sera tirée au pire au quatrième tirage. Ainsi les valeurs possibles de X sont $1, 2, 3$ ou 4.
   Notons les événements
   $$\begin{aligned} R_k &= \text{"on tire une boule rouge au } k^e \text{ tirage,"} \\ N_k &= \text{"on tire une boule noire au } k^e \text{ tirage."} \end{aligned}$$
   On a
   $$\begin{aligned} P(X=1) &= P(R_1) = \frac{2}{5}, \\ P(X=2) &= P(R_2 \cap N_1) = P(R_2|N_1)P(N_1) = \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}, \\ P(X=3) &= P(R_3 \cap N_2 \cap N_1) = P(R_3|N_2 \cap N_1)P(N_2|N_1)P(N_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}, \\ P(X=4) &= 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$
   L'espérance vaut
   $$E(X) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{10} = 2$$

Exercice 2 Notons D_1 et D_2 les résultats des dés. D_1 et D_2 sont indépendantes, de lois uniformes sur $\{1, \ldots, , 6\}$. On a $X = \min(D_1, D_2)$.

Les valeurs possibles de G sont $-10, 0$ et 200. On a

$$\begin{aligned} P(G=200) &= P(X=6) \\ &= P(D_1 = 6, D_2 = 6) \\ &= P(D_1 = 6)P(D_2 = 6) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

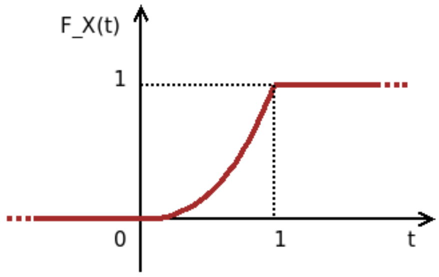
$$\begin{aligned} P(G=-10) &= P(X \leq 3) \\ &= 1 - P(X \geq 4) \\ &= 1 - P(D_1 \geq 4, D_2 \geq 4) \\ &= 1 - P(D_1 \geq 4)P(D_2 \geq 4) \\ &= 1 - \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

$$P(G=0) = 1 - P(G=200) - P(G=-10) = 1 - \frac{1}{36} - \frac{3}{4} = \frac{2}{9}.$$

$$E(G) = 200 \times \frac{1}{36} + (-10) \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{2}{9} = -\frac{70}{36} \simeq -1.94.$$

L'espérance du gain est négative donc le jeu est défavorable.

Exercice 3

1. 

2.
$$\begin{aligned}
P(X \le 2) &= F_X(2) = 1, \\
P(X = 1) &= F_X(1) - \lim_{t \to 1, t<1} F_X(t) = 0 \quad \text{(car } F_X \text{ est continue)}, \\
P(X \le 1/2) &= F_X(1/2) = 1/4, \\
P(-3/4 \le X \le 3/4) &= P(X \le 3/4) - P(X < -3/4) = F_X(3/4) - \lim_{\substack{t \to 3/4 \\ t<3/4}} F_X(t) \\
&= F_X(3/4) - F_X(-3/4) = 9/16 - 0 = 9/16.
\end{aligned}$$

3. Une variable aléatoire est dite à densité lorsqu'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que pour tous réels $a \le b$,
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(t)dt.$$

4. La fonction F_X étant **continue** et C^1 par morceaux, elle admet une densité égale à sa dérivée : $f_X(t) = F'_X(t)$ pour tout t où F_X est dérivable. Ici F_X est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc
$$f_X(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0, \\ 2t \text{ si } t \in [0, 1[, \\ 0 \text{ si } t > 1. \end{cases}$$
La valeur de $f_X(1)$ n'a pas d'importance, on peut choisir par exemple $f_X(1) = 1$.
remarque : le point important ici est la continuité de F_X. Lorsque F_X n'est pas continue en un point (comme dans l'exercice 6 du TD 5), la variable X ne peut pas être une variable à densité.

Exercice 4

1. Si un mot de longueur n contient une n-séquence, c'est que ce mot ne contient que des 1. Donc
$$P(A_n) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_n = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) \cdots P(X_n = 1),$$
car les X_i sont indépendantes. Donc
$$P(A_n) = p \times p \times \cdots \times p = p^n.$$

2. On ne peut avoir qu'une seule 2-séquence dans un mot de longueur 4. En effet si le mot comporte une 2-séquence, elle est
 – soit placée au début, et dans ce cas le mot est (1100) ou (1101),
 – soit placée au milieu et dans ce cas le mot est (0110),
 – soit placée à la fin et dans ce cas le mot est (0011) ou (1011).
 Donc dans tous les cas on voit qu'il n'y a pas d'autre 2-séquence.
 Pour calculer $P(A_n)$ on considère les trois cas précédents :
$$A_n = S_1 \cup S_2 \cup S_3,$$
 où S_i ="la 2-séquence commence en position i". Ces trois événements sont incompatibles, donc
$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(S_1) + P(S_2) + P(S_3) \\ &= P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0) \\ &\quad + P(X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 1). \end{aligned}$$
 Les X_i étant indépendantes, on obtient
$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1)P(X_4 = 0) \\ &\quad + P(X_2 = 0)P(X_3 = 1)P(X_4 = 1), \\ &= p \times p \times (p-1) + (1-p) \times p \times p \times (1-p) + (1-p) \times p \times p \\ &= (1-p)(3-p)p^2. \end{aligned}$$

3. Lorsque $k \geq \frac{n}{2}$, comme dans l'exemple précédent, on ne peut avoir qu'une seule k-séquence dans le mot, car pour qu'il y ait deux k-séquences ou plus, il faudrait $2k$ 1 plus un 0 pour les séparer, ce qui est impossible car $2k + 1 > n$.
 Pour calculer $P(A_k)$, on considère toutes les positions possibles pour la k-séquence dans le mot. On a ainsi, en définissant S_i="la k-séquence commence en position i",
$$A_k = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_{n-k+1},$$
 et ces événements étant incompatibles, on a $P(A_k) = P(S_1) + \cdots + P(S_{n-k+1})$. Pour le calcul des $P(S_i)$ on regarde d'abord le cas où la séquence est en début ou en fin ($i = 1$ ou $i = n - k + 1$) :
$$\begin{aligned} P(S_1) &= P(X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_k = 1, X_{k+1} = 0) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) \ldots P(X_k = 1)P(X_{k+1} = 0) \\ &= p^k(1-p). \end{aligned}$$
 De même on aura $P(S_{n-k+1}) = p^k(1-p)$ (probabilité que le mot se termine par un 0 suivi de k 1). Dans tous les autres cas ($2 \leq i \leq n-k$) on a
$$\begin{aligned} P(S_i) &= P(X_{i-1} = 0, X_i = 1, \ldots, X_{i+k-1} = 1, X_{i+k} = 0) \\ &= (1-p)^2 p^k. \end{aligned}$$
 Ainsi
$$P(A_k) = 2p^k(1-p) + (n-k-1)(1-p)^2 p^k = p^k(1-p)[2 + (n-k-1)(1-p)].$$
 Dans le cas $k < \frac{n}{2}$ le calcul n'est plus valable car il peut y avoir plusieurs k-séquences dans le mot, et les événements S_i ne sont plus incompatibles.