Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen de deuxième session - 12/06/2013 - Durée : 2 heures

Exercice 1 Dans cet exercice on demande de justifier précisément chaque opération ensembliste ou probabiliste effectuée.
Soient A et B deux événements indépendants.

1. Montrer que A^c et B sont indépendants, puis que A^c et B^c sont indépendants. (*remarque : il s'agit d'un résultat du cours que l'on demande de redémontrer*).
2. Calculer $P[(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)]$ en fonction de $P(A)$ et $P(B)$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

3. Rappeler l'expression de $P(X = n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
4. On note
   - $A =$ "X est un nombre pair ",
   - $B =$ "Y est un nombre pair ",
   - $C =$ "$X + Y$ est un nombre pair ".

   Calculer $P(A)$ et $P(B)$, puis $P(C)$.

Exercice 2 Lors d'un concours de saut en hauteur, un athlète dispose de deux tentatives pour franchir la barre. On suppose que :
- il a deux chances sur trois de franchir la barre à la première tentative,
- il a une chance sur deux de la franchir à la deuxième tentative s'il a échoué la première fois (il est plus fatigué ou plus tendu).

Sachant qu'au final il a réussi à franchir la barre, quelle est la probabilité que ce soit à la première tentative ?

Exercice 3 On lance ensemble 10 dés à 6 faces. Tous les lancers sont supposés indépendants. On met ensuite de côté les dés qui sont tombés sur 6 et on relance les autres. On note X le nombre de 6 obtenus après le premier lancer et Y le nombre de 6 obtenus au deuxième lancer, et Z le nombre total de 6 obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Rappeler l'expression de $P(X = k)$ pour tout entier k.
2. Soit h un entier fixé, $h \leq 10$. Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant l'événement $[X = h]$? Donner l'expression de $P(Y = k | X = h)$ pour tout entier k.
3. En déduire la loi de Z. Retrouver ce résultat par un argument direct.

Exercice 4 Soit X une variable de loi de densité $f(x) = ce^{-\lambda|x-a|}$, où $c > 0$, $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la valeur de c en fonction de λ et a.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables indépendantes et de même loi que X.

3. Montrer que la loi des grands nombres peut s'appliquer à la suite (X_k), et énoncer cette loi.

4. En déduire des estimateurs des paramètres a et λ.

On s'intéresse à présent à la proportion des valeurs $(X_k)_{1\leq k\leq n})$ comprises entre $a-\frac{1}{\lambda}$ et $a+\frac{1}{\lambda}$, c'est-à-dire à la variable $Y_n = \frac{N}{n}$ où N est le nombre de X_k compris entre $a-\frac{1}{\lambda}$ et $a+\frac{1}{\lambda}$ pour $1 \leq k \leq n$.

5. Calculer $p = P(a-\frac{1}{\lambda} \leq X \leq a+\frac{1}{\lambda})$.
6. Expliquer pourquoi la loi des grands nombres permet aussi de justifier que Y_n converge vers p. A quelles variables doit-on appliquer la loi des grands nombres dans ce cas ?