Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen du 7 janvier 2014 - Correction

Exercice 1

1. Soit S l'événement "Après les deux tirages l'urne A contient trois boules rouges et l'urne B une boule verte". Pour que cet événement se réalise il faut que l'on ait tiré une boule verte en premier puis une boule rouge en deuxième. On a donc $S = V_1 \cap R_2$, donc
$$P(S) = P(R_2 \cap V_1) = P(R_2|V_1)P(V_1).$$
Or $P(V_1) = \frac{1}{3}$ (une chance sur trois de tirer la boule verte dans l'urne A au début) et $P(R_2|V_1) = \frac{1}{2}$ (car si on a tiré une boule verte en premier, alors l'urne B contient une boule de chaque couleur). Ainsi
$$P(S) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

2. Pour que la configuration finale soit identique à la configuration initiale, il faut que les deux boules tirées soient de même couleur. On a donc en notant I l'événement demandé,
$$I = (R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2).$$
Donc
$$\begin{aligned} P(I) &= P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap V_2) \quad \text{(événements disjoints)}, \\ &= P(R_2|R_1)P(R_1) + P(V_2|V_1)P(V_1). \end{aligned}$$
Or $P(V_1) = \frac{1}{3}, P(R_1) = \frac{2}{3}$, et $P(V_2|V_1) = \frac{1}{2}$ (car si on a tiré une boule verte en premier, alors l'urne B contient une boule de chaque couleur), et $P(R_2|R_1) = 1$ (car si on a tiré une boule rouge en premier, alors l'urne B ne contient que des boules rouges). D'où
$$P(I) = 1 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$
remarque : on aurait pu aussi dire simplement que $I = S^c$, donc $P(I) = 1 - P(S) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$: I est l'événement contraire de S car ce sont les deux seules configurations possibles.

3. La probabilité demandée est $P(V_1|I)$. On a
$$P(V_1|I) = \frac{P(I|V_1)P(V_1)}{P(I)}.$$
Or $P(I|V_1) = P(V_2|V_1) = \frac{1}{2}$ car si on a tiré une boule verte en premier, on revient à la configuration initiale uniquement si on tire une boule verte en deuxième. D'où
$$P(V_1|I) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}.$$

4.
```
# état initial
urneA = c("R","R","V")
urneB = "R"
# premier tirage
k1 = sample(1:3,1)
urneB = c(urneB,urneA[k1])
urneA = urneA[-k1]
#deuxième tirage
k2 = sample(1:2,1)
urneA = c(urneA,urneB[k2])
urneB = urneB[-k2]
```

Exercice 2

1. X et Y suivent la même loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$, car il s'agit du rang d'apparition d'un événement de probabilité $\frac{1}{6}$ ("le dé tombe sur 5" pour X, "le dé tombe sur "6" pour Y) lors de la répétition d'expériences indépendantes de même nature (lancers de dé).
2. $P(X = 1, Y = 1) = 0$ car le dé ne peut pas à la fois tomber sur 5 et sur 6 au premier tirage. Si X et Y étaient indépendantes, on aurait $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$. Or $P(X = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{6}$, donc $P(X = 1)P(Y = 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \neq 0 = P(X = 1, Y = 1)$. Donc$X$ et Y ne sont pas indépendantes.
3. $[X = 2] \cap [Y = 4]$ est l'événement "le premier 5 est obtenu au deuxième coup et le premier 6 au quatrième coup". Ceci est réalisé lorsque l'on a tout sauf un 5 ou un 6 au premier coup, un 5 au 2e coup, tout sauf un 6 au troisième coup et un 6 au 4e coup. On a donc
$$[X = 2] \cap [Y = 4] = A_1 \cap C_2 \cap S_3^c \cap S_4.$$
D'où
$$\begin{aligned} P(X = 2, Y = 4) &= P(A_1 \cap C_2 \cap S_3^c \cap S_4) \\ &= P(A_1)P(C_2)P(S_3^c)P(S_4) \\ &\quad \text{(ces événements sont indépendants car les lancers sont indépendants)} \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{4 \times 5}{6^4} \end{aligned}$$
4. On doit distinguer les cas $i < j$, $i > j$ et $i = j$.
   - Si $i < j$: dans ce cas on a, de façon similaire à la question précédente,
   $$[X = i, Y = j] \;=\; A_1 \cap \cdots A_{i-1} \cap C_i \cap S_{i+1}^c \cap \cdots \cap S_{j-1}^c \cap S_j.$$
   Donc
   $$\begin{aligned} P(X = i, Y = j) &= P(A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1} \cap C_i \cap S_{i+1}^c \cap \cdots \cap S_{j-1}^c \cap S_j), \\ &= P(A_1) \times \cdots \times P(A_{i-1}) \times P(C_i) \times P(S_{i+1}^c) \times \cdots \times P(S_{j-1}^c) \times P(S_j), \\ &= \frac{4}{6} \times \cdots \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}, \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{j-i-1} \\ &= \frac{4^{i-1} \times 5^{j-i-1}}{6^j} \end{aligned}$$

– Si $i > j$: ce cas est similaire au cas précédent :

$$[X = i, Y = j] \quad = \quad A_1 \cap \cdots A_{j-1} \cap S_j \cap C_{j+1}^c \cap \cdots \cap C_{i-1}^c \cap C_i.$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X = i, Y = j) &= P(A_1 \cap \cdots \cap A_{j-1} \cap S_j \cap C_{j+1}^c \cap \cdots \cap C_{i-1}^c \cap C_i), \\ &= P(A_1) \times \cdots \times P(A_{j-1}) \times P(S_j) \times P(C_{j+1}) \times \cdots \times P(C_{i-1}^c) \times P(C_i), \\ &= \frac{4}{6} \times \cdots \times \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}, \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^{j-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{i-j-1} \\ &= \frac{4^{j-1} \times 5^{i-j-1}}{6^i} \end{aligned}$$

– Si $i = j$: alors $P(X = i, Y = i) = 0$ pour la même raison qu'à la question 1 : le i^e lancer ne peut pas tomber à la fois sur 5 et sur 6.

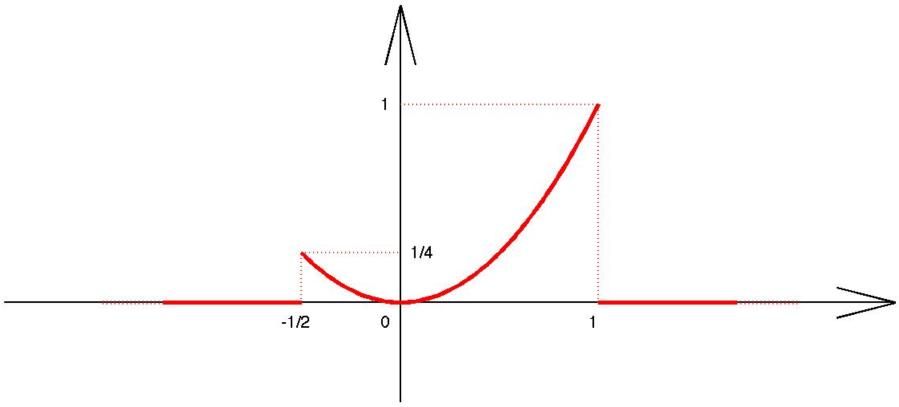
Finalement la loi du couple (X, Y) est donnée par

$$\forall i, j \geq 1, \quad P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{4^{i-1} \times 5^{j-i-1}}{6^j} & \text{si } i < j, \\ \frac{4^{j-1} \times 5^{i-j-1}}{6^i} & \text{si } i > j, \\ 0 \quad \text{si } i = j. \end{cases}$$

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. f est une densité de probabilité si $f(x) \geq 0$ pour tout x (ce qui est vrai dès que $a \geq 0$) et si
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$
Or
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-1/2}^{1} ax^2 dx = a \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1/2}^{1} = a\left(\frac{1}{3} - \frac{(-1/2)^3}{3}\right) \\ &= a\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8 \times 3}\right) = a \times \frac{9}{8 \times 3} = a \times \frac{3}{8} \end{aligned}$$
D'où
$$a = \frac{8}{3}.$$



2.

$$\begin{aligned} P(X \leq 0) &= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{-1/2}^{0} ax^2 dx = \frac{8}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1/2}^{0} \\ &= \frac{8}{3}\left(0 - \frac{(-1/2)^3}{3}\right) = \frac{8}{3} \times \frac{1}{8 \times 3} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq \frac{1}{2}) &= \int_{1/2}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1/2}^{1} ax^2 dx = \frac{8}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} \\ &= \frac{8}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{(1/2)^3}{3}\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8 \times 3}\right) = \frac{8}{3} \times \frac{7}{8 \times 3} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

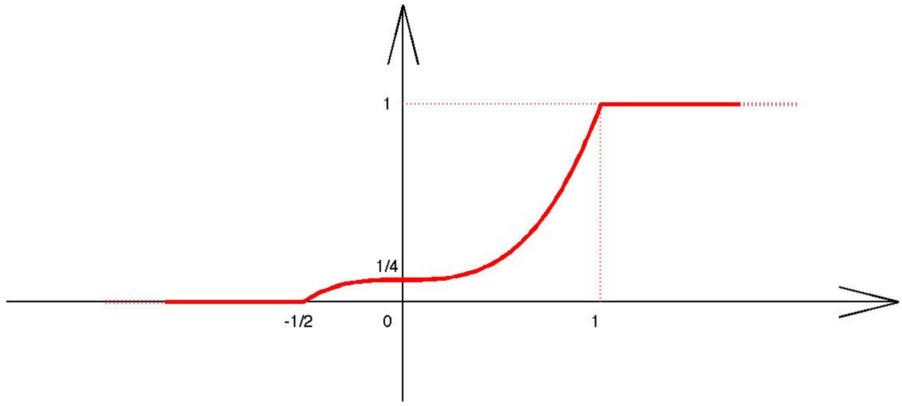
3. La fonction de répartition d'une variable X est la fonction F_X définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $F_X(t) = P(X \leq t)$. Ici on a donc

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx.$$

- Si $t < -1/2$, cette intégrale vaut 0 car $f(x) = 0$ pour tout $x < -1/2$. Donc $F_X(t) = 0$ dans ce cas.
- Si $-1/2 \leq t \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} F_X(t) &= a\int_{-1/2}^{t} x^2 dx = \frac{8}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1/2}^{t} = \frac{8}{3}\left(\frac{t^3}{3} - \frac{(-1/2)^3}{3}\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{8 \times 3}\right) \\ &= \frac{8}{9}t^3 + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

- Si $t > 1$ alors $F_X(t) = 1$.



Exercice 4

1. On a
$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$
L'espérance de T vaut $E(T) = \frac{1}{a} = 5$.
2. `rexp(1,1/5)`
3. $$P(T \geq 10) = \int_{10}^{+\infty} f_T(x)dx = \frac{1}{5}\int_{10}^{+\infty} e^{-\frac{x}{5}}dx = -\left[e^{-\frac{x}{5}}\right]_{10}^{+\infty} = e^{-2} \simeq 0.14.$$
4. Les variables T_k sont indépendantes et de même loi que T, et $E(T)$ ainsi que $V(T)$ sont bien définies. On peut donc appliquer la loi des grands nombres : les moyennes empiriques $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$ convergent vers $E(X) = \frac{1}{a}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Donc un estimateur de a est donné par
$$\frac{1}{\bar{X}_n} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n X_k}.$$