Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Introduction aux probabilités - Licence MIA 2e année - parcours Informatique
Examen de deuxième session - 16 juin 2014 - Durée : 2 heures

Exercice 1 La loi de X est donnée par :

$$\begin{cases} P(X=25) = \frac{3\times25}{3\times25+5\times30+2\times35} = \frac{15}{59} \simeq 0.254, \\ P(X=30) = \frac{5\times30}{3\times25+5\times30+2\times35} = \frac{30}{59} \simeq 0.508, \\ P(X=35) = \frac{2\times35}{3\times25+5\times30+2\times35} = \frac{14}{59} \simeq 0.237. \end{cases}$$

$$E(X) = 25\times\frac{15}{59} + 30\times\frac{30}{59} + 35\times\frac{14}{59} = \frac{1756}{59} \simeq 29.8.$$

Le nombre moyen d'élèves par classe est égal à

$$\frac{3\times25+5\times30+2\times35}{10} = \frac{295}{10} = 29.5.$$

Il est différent de $E(X)$ car la loi du tirage au sort est différente : dans un cas on effectue un tirage uniforme sur l'ensemble des élèves, et dans l'autre un tirage uniforme sur les classes. Comme il y a plus de chances dans le premier cas de tirer au sort un élève dont la classe a un plus grand nombre d'élèves, le calcul de moyenne est différent.

Exercice 2

1.
```
De = 1:6
Piece = c("Pile","Face")
ResultatDe = sample(De,1)
ResultatPieces = sample(Piece,ResultatDe,replace=TRUE)
sum(ResultatPieces=="Face")
```

2. $P(X=3|D=4)$ est la probabilité que la pièce tombe trois fois sur Face sachant que le dé est tombé sur 4. Or si le dé est tombé sur 4, on a lancé quatre fois la pièce et donc la probabilité demandée correspond à la probabilité de réaliser trois Face lors de 4 lancers indépendants d'une pièce de monnaie. On a donc

$$P(X=3|D=4) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-3} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}.$$

Plus généralement on a

$$P(X=k|D=n) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\times\frac{1}{2^n},$$

car la loi conditionnelle de X sachant l'événement $[D=n]$ est la loi binomiale de paramètres $p=\frac{1}{2}$ et n.

3. $$P(G) = P(X\geq2) = 1-P(X<2) = 1-P(X=0)-P(X=1).$$

Or on a

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(X=0|D=1)P(D=1)+P(X=0|D=2)P(D=2)\\
&\quad +P(X=0|D=3)P(D=3)+P(X=0|D=4)P(D=4)\\
&\quad +P(X=0|D=5)P(D=5)+P(X=0|D=6)P(D=6),\\
&= \frac{1}{2^1}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2^3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2^4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2^5}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2^6}\times\frac{1}{6}\\
&= \frac{21}{128},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= P(X=1|D=1)P(D=1)+P(X=1|D=2)P(D=2)\\
&\quad +P(X=1|D=3)P(D=3)+P(X=1|D=4)P(D=4)\\
&\quad +P(X=1|D=5)P(D=5)+P(X=1|D=6)P(D=6),\\
&= \frac{1}{2^1}\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{2^3}\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{2^4}\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{2^5}\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{2^6}\times\frac{1}{6}\\
&= \frac{5}{16},
\end{aligned}$$

et donc

$$P(G)=1-\frac{21}{128}-\frac{5}{16}=\frac{67}{128}\simeq 0.52.$$

Pour l'espérance on a

$$E(X) = E(X|D=1)P(D=1)+E(X|D=2)P(D=2)+E(X|D=3)P(D=3)+E(X|D=4)$$

Or $E(X|D=n)=np=\frac{n}{2}$ (espérance d'une loi binomiale). Donc

$$E(X) = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{49}{120}\simeq 0.41.$$

4.

$$\begin{aligned}
P(D=2|G) &= \frac{P(G|D=2)P(D=2)}{P(G)}=\frac{(1-P(X=0|D=2)-P(X=1|D=2))\,P(D=2)}{P(G)}\\
&= \frac{\left(1-\frac{1}{2^2}-2\times\frac{1}{2^2}\right)\frac{1}{6}}{P(G)}\\
&= \frac{128}{4\times 6\times 67}\simeq 0.08.
\end{aligned}$$

On a donc environ 8% de chances que le dé soit tombé sur 2 si l'on a gagné le jeu.

Exercice 3

1. Le support de la loi de X est $\mathbb{N}$. Il est infini mais dénombrable, donc la loi de X est discrète.
2. On doit avoir

$$\sum_{n\geq 0} P(X=n)=1,$$

ce qui donne

$$\sum_{n\geq 0}\frac{c}{n!}=c\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}=c\times e^1,$$

donc $c=e^{-1}=1/e$. On reconnait la loi de Poisson de paramètre $\lambda=1$.

3.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} - \frac{1}{2e} = 1 - \frac{5}{2e}.$$

$$P(4 \leq X \leq 5) = P(X=4) + P(X=5) = \frac{1}{e}(\frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}) = \frac{1}{20e}.$$

4.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n\geq 0} nP(X=n) = \frac{1}{e}\sum_{n\geq 0} n \times \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{e}\left(0 + \sum_{n\geq 1} n \times \frac{1}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{e}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{e}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{e} \times e, \end{aligned}$$

et donc $E(X) = 1$.

Exercice 4

1. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Autrement dit la loi de X_i est donnée par $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$. Ensuite on a

$$N = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000}.$$

En effet à chaque fois qu'une réponse est favorable on compte 1 et 0 sinon ; donc la somme des X_i correspond bien au nombre de réponses favorables, c'est-à-dire à N. La loi de N est la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et p. On a $E(N) = np$ et $V(N) = np(1-p)$. La meilleure estimation de p est donnée par le taux de réponses favorables, c'est-à-dire $\frac{N}{n}$. En effet d'après la loi des grands nombres on sait que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{N}{n}$ est proche de $E(X_i) = p$ lorsque n est grand (ici $n = 1000$).

2. Les X_i sont indépendantes et toute de même loi. Cette loi (loi de Bernoulli de paramètre p) admet bien une espérance $\mu = p$ et une variance $\sigma^2 = p(1-p)$. Le théorème central limite est donc valide : $Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right)$ converge en loi vers une variable Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Or

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\left(\frac{N}{n} - p\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\left(\frac{N}{n} - p\right),$$

donc la loi de N est proche de la loi de $n\left(\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}Z + p\right) = \sqrt{np(1-p)}Z + np$ qui est la loi normale $\mathcal{N}\left(np, \frac{p(1-p)}{n}\right)$. La densité de probabilité de cette loi est :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} e^{-\frac{(t-np)^2}{\frac{p(1-p)}{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi p(1-p)}} e^{-n\frac{(t-np)^2}{p(1-p)}}.$$

3. On a
$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \simeq 0.95,$$
donc
$$P(-\sqrt{np(1-p)} \times 1.96 \leq \sqrt{np(1-p)}Z \leq \sqrt{np(1-p)} \times 1.96) \simeq 0.95,$$
On a toujours $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ pour $p \in [0,1]$, donc
$$P(-\sqrt{n/4} \times 1.96 \leq \sqrt{np(1-p)}Z \leq \sqrt{n/4} \times 1.96) \geq 0.95,$$
$$P(-\sqrt{n/4} \times 1.96 + np \leq \sqrt{np(1-p)}Z + np \leq \sqrt{n/4} \times 1.96 + np) \geq 0.95,$$
et donc d'après l'approximation obtenue par le théorème central limite :
$$P(-\sqrt{n/4} \times 1.96 + np \leq N \leq \sqrt{n/4} \times 1.96 + np) \geq 0.95,$$
$$P(N - \sqrt{n/4} \times 1.96 \leq np \leq N + \sqrt{n/4} \times 1.96) \geq 0.95,$$
$$P(\frac{N}{n} - \frac{1}{\sqrt{4n}} \times 1.96 \leq p \leq \frac{N}{n} + \frac{1}{\sqrt{4n}} \times 1.96) \geq 0.95.$$
Ainsi l'intervalle de confiance demandé est donné par
$$\left[\frac{N}{n} - \frac{1}{\sqrt{4n}} \times 1.96, \frac{N}{n} + \frac{1}{\sqrt{4n}} \times 1.96\right].$$