Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Probabilités et statistiques pour l'informatique - Licence MIA 2e année
Examen de deuxième session - 15 juin 2015 - Correction

Exercice 1

1. – X correspond au rang du premier succès (où le succès signifie "tirer une boule noire") lors d'une succession d'expériences indépendantes (car le tirage est avec remise, donc il y a les mêmes boules dans le sac à chaque fois) avec probabilité de succès $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ à chaque fois. Ainsi X suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{2}{3}$.
   – On a donc $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$.
   – Pour calculer $P(X \geq 3)$, on peut remarquer que $[X \geq 3]$ correspond à l'événement "les deux premières boules tirées étaient blanches". Notons B_i l'événement "on tire une boule blanche au i^e tour". On a

$$P(X \geq 3) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2) = \frac{1}{9}$$

   car les B_i sont indépendants.
   remarque. On peut aussi calculer ainsi :

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - p - p(1 - p) \\ &= (1 - p)^2 \\ &= (1 - 2/3)^2 = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

2. – Si les tirages sont sans remise, les tirages ne sont pas indépendants car la composition du sac change à chaque tour. Il faut donc utiliser les probabilités conditionnelles. Tout d'abord on remarque que $Supp(X) = \{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire que X ne peut prendre que les valeurs 1, 2, ou 3. en effet, si on ne tire que des boules blanches aux premiers tours, il ne restera plus de boule blanche au troisième tour et donc on tirera une noire.
   Pour déterminer la loi de X il faut donc calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$. On a, en notant N_i="on tire une boule noire au i^e tour", et B_i="on tire une boule blanche au i^e tour",

$$P(X = 1) = P(N_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{(probabilité de tirer une noire au premier tour),}$$

$$P(X = 2) = P(N_2 \cap B_1) = P(N_2|B_1)P(B_1) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

   ($P(N_2|B_1) = \frac{4}{5}$ car au deuxième tour il reste toujours 4 boules noires et seulement 5 boules en tout),

$$P(X = 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{15 - 10 - 4}{15} = \frac{1}{15}.$$

remarque. Pour $P(X=3)$, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}
P(X=3) &= P(N_3 \cap B_2 \cap B_1) \\
&= P(N_3|B_2 \cap B_1)P(B_2 \cap B_1) \\
&= P(N_3|B_2 \cap B_1)P(B_2|B_1)P(B_1) \\
&= 1 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15},
\end{aligned}$$

car $P(N_3|B_2 \cap B_1) = 1$: au troisième tour il ne reste plus que des boules noires donc on ne peut que tirer une noire, et $P(B_2|B_1) = \frac{1}{5}$: au 2e tour il reste 1 boule blanche et 5 boules en tout.
Ainsi la loi de X est donnée par $P(X=1) = \frac{2}{3}$, $P(X=2) = \frac{4}{15}$, $P(X=3) = \frac{1}{15}$.

- L'espérance de X est donnée par

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2) + 3 \times P(X=3) \\
&= \frac{2}{3} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{1}{15} \\
&= \frac{10+8+3}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

- Enfin $P(X \geq 3) = P(X=3) = \frac{1}{15}$ puisque X ne peut pas prendre de valeur plus grande.

Exercice 2

1. X et Y suivent toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$. En effet X compte le nombre de succès ("tomber sur un 6") lors de la répétition de n expériences indépendantes et de probabilité de succès $p = \frac{1}{6}$. Pour Y c'est identique puisque cette fois on compte le nombre de 1, et la probabilité de tomber sur 1 vaut aussi $\frac{1}{6}$.
2. $[X=0] \cap [Y=0]$ correspond à l'événement "le dé n'est jamais tombé sur 1 ni sur 6 lors des n lancers". Or la probabilité de ne tomber ni sur 1 ni sur 6 lors d'un lancer est de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Comme les lancers sont indépendants, on a

$$P([X=0] \cap [Y=0]) = (2/3)^n.$$

Si les variables sont indépendantes, alors on aurait $P([X=i] \cap [Y=j]) = P(X=i)P(Y=j)$ pour tous i, j. En particulier, on aurait $P([X=0] \cap [Y=0]) = P(X=0)P(Y=0)$. Or comme X et Y suivent la même loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$, donc $P(X=0) = P(Y=0) = (1-p)^n = (5/6)^n$. Par conséquent,

$$P([X=0] \cap [Y=0]) = (2/3)^n \neq (5/6)^{2n} = P(X=0)P(Y=0),$$

et donc X et Y ne sont pas indépendantes.
3. Il n'y a qu'un seul lancer, donc X et Y ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. La loi du couple (X,Y) est donc donnée par les probabilités suivantes :

$$P([X=0] \cap [Y=0]) = (2/3)^1 = 2/3,$$

$$P([X=1] \cap [Y=0]) = P(Y=0) - P([X=0] \cap [Y=0]) = (1-1/6) - 2/3 = 1/6,$$

$$P([X=0] \cap [Y=1]) = P(X=0) - P([X=0] \cap [Y=0]) = (1-1/6) - 2/3 = 1/6,$$

$$P([X=1] \cap [Y=1]) = P(Y=1) - P([X=0] \cap [Y=1]) = 1/6 - 1/6 = 0.$$

On peut écrire cette loi sous forme de tableau :

y \ x	0	1
0	2/3	1/6
1	1/6	0

remarques.

– On a utilisé pour le calcul la formule des probabilités totales, c'est-à-dire le fait que les lois de X et Y s'obtiennent en sommant les lignes et les colonnes dans la tableau. Comme on connaissait déjà les lois de X et Y, on en déduit la loi jointe par soustraction (ça marche ici car il n'y avait que 4 valeurs à trouver ; pour un tableau plus grand ce ne serait pas suffisant).

– Pour $P([X=1]\cap[Y=1])$ on aurait pu aussi tout simplement remarquer que $[X=1]$ et $[Y=1]$ sont incompatibles car le dé ne peut pas à la fois tomber sur 1 et sur 6. Donc la probabilité est nulle.

Exercice 3

1. Un habitant parle français si sa langue maternelle est le français ou s'il l'a appris à l'école. Notons les événements

$$F = \text{"Il parle le français"},$$

$$F_m = \text{"Sa langue maternelle est le français"},$$

$$F_e = \text{"Il a appris le français à l'école"}.$$

(On notera dans la suite de la même manière $A, I, M, E, A_m, I_m, ...$ les événements correspondants à l'allemand, l'italien, le romanche, l'anglais. On a donc $P(F) = P(F_m \cup F_e) = P(F_m) + P(F_e)$ car les deux événements sont incompatibles (si sa langue maternelle est le français, il ne choisit pas le français à l'école). Or $P(F_m) = 25\% = 1/4$ d'après l'énoncé, et

$$P(F_e) = P(F_e|F_m^c)P(F_m^c) + P(F_e|F_m)P(F_m) = \frac{1}{4}\times(1-1/4)+0 = 3/16.$$

D'où $P(F) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$. Pour l'allemand, on a

$$P(A) = P(A_m) + P(A_e) = 65\% + \frac{1}{4}\times(1-65\%) = 13/20 + (1-13/20)/4 = 59/80.$$

Pour l'italien,

$$P(I) = P(I_m) + P(I_e) = 9\% + \frac{1}{4}\times(1-9\%) = 9/100 + (1-9/100)/4 = 127/400.$$

Pour le romanche,

$$P(R) = P(R_m) + P(R_e) = 1\% + \frac{1}{4}\times(1-1\%) = 1/100 + (1-1/100)/4 = 103/400.$$

2. Il y a une chance sur 4 qu'il parle anglais, puisque l'anglais ne peut pas être sa langue maternelle, et qu'il a une chance sur 4 d'avoir choisi anglais à l'école. On peut en fait ici appliquer la même règle que précédemment, en utilisant le fait que $P(E_m) = 0$:

$$P(E) = P(E_m) + P(E_a) = 0 + (1-0)/4 = \frac{1}{4}.$$

3. Notons $F_1 =$ "le premier habitant parle français" et $F_2 =$ "le deuxième habitant parle français". Ces deux événements sont indépendants, et donc

$$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)P(F_2) = (7/16)^2.$$

De même, on aura pour les autres langues,

$$P(A_1 \cap A_2) = (59/80)^2,$$
$$P(I_1 \cap I_2) = (127/400)^2,$$
$$P(R_1 \cap R_2) = (103/400)^2,$$
$$P(E_1 \cap E_2) = (1/4)^2.$$

4. Notons $L =$"les deux habitants ont une langue commune". On a

$$L = (F_1 \cap F_2) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (I_1 \cap I_2) \cup (R_1 \cap R_2) \cup (E_1 \cap E_2).$$

Ces événements ne sont pas incompatibles car les deux habitants peuvent avoir deux langues communes. Il faut donc soustraire les probabilités des intersections 2 à 2 :

$$\begin{aligned}
&P(L) = P(F_1 \cap F_2) + P(A_1 \cap A_2) + P(I_1 \cap I_2) + P(R_1 \cap R_2) + P(E_1 \cap E_2) \\
&-P(F_1 \cap F_2 \cap A_1 \cap A_2) - P(F_1 \cap F_2 \cap I_1 \cap I_2) - P(F_1 \cap F_2 \cap R_1 \cap R_2) - P(F_1 \cap F_2 \cap E_1 \cap E_2) \\
&-P(A_1 \cap A_2 \cap I_1 \cap I_2) - P(A_1 \cap A_2 \cap R_1 \cap R_2) - P(A_1 \cap A_2 \cap E_1 \cap E_2) \\
&-P(I_1 \cap I_2 \cap R_1 \cap R_2) - P(I_1 \cap I_2 \cap E_1 \cap E_2) \\
&-P(R_1 \cap R_2 \cap E_1 \cap E_2).
\end{aligned}$$

Par indépendance on obtient

$$\begin{aligned}
&P(L) = (7/16)^2 + (59/80)^2 + 127/400)^2 + (103/400)^2 + (1/4)^2 \\
&-P(F_1 \cap A_1)P(F_2 \cap A_2) - P(F_1 \cap I_1)P(F_2 \cap I_2) - P(F_1 \cap R_1)P(F_2 \cap R_2) - P(F_1 \cap E_1)P(F_2 \cap E_2) \\
&-P(A_1 \cap R_1)P(A_2 \cap R_2) - P(A_1 \cap E_1)P(A_2 \cap E_2) \\
&-P(I_1 \cap R_1)P(I_2 \cap R_2) - P(I_1 \cap E_1)P(I_2 \cap E_2) \\
&-P(R_1 \cap E_1)P(R_2 \cap E_2).
\end{aligned}$$

Les probabilités relatives au premier habitant sont égales à celles relatives au deuxième habitant. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
&P(L) = (7/16)^2 + (59/80)^2 + 127/400)^2 + (103/400)^2 + (1/4)^2 \\
&-P(F_1 \cap A_1)^2 - P(F_1 \cap I_1)^2 - P(F_1 \cap R_1)^2 - P(F_1 \cap E_1)^2 \\
&-P(A_1 \cap I_1)^2 - P(A_1 \cap R_1)^2 - P(A_1 \cap E_1)^2 \\
&-P(I_1 \cap R_1)^2 - P(I_1 \cap E_1)^2 \\
&-P(R_1 \cap E_1)^2.
\end{aligned}$$

Calculons d'abord $P(F_1 \cap A_1)$:

$$\begin{aligned}
P(F_1 \cap A_1) &= P((F_{m1} \cap A_{e1}) \cup (F_{e1} \cap A_{m1})) \\
&= P(F_{m1} \cap A_{e1}) + P(F_{e1} \cap A_{m1}) \\
&= P(A_{e1}|F_{m1})P(F_{m1}) + P(F_{e1}|A_{m1})P(A_{m1}) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{25}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{65}{100} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{25+65}{100}.
\end{aligned}$$

Les autres probabilités se calculent de façon analogue. On obtient donc, en mettant $(1/4)^2$ en facteur,

$$
\begin{aligned}
&P(L) = (7/16)^2 + (59/80)^2 + 127/400)^2 + (103/400)^2 + (1/4)^2 \\
&-(1/4)^2 \left(\left(\frac{90}{100}\right)^2 - \left(\frac{25+9}{100}\right)^2 - \left(\frac{25+1}{100}\right)^2 - \left(\frac{25+0}{100}\right)^2 \right. \\
&- \left(\frac{65+9}{100}\right)^2 - \left(\frac{65+1}{100}\right)^2 - \left(\frac{65+0}{100}\right)^2 \\
&- \left(\frac{9+1}{100}\right)^2 - \left(\frac{9+0}{100}\right)^2 \\
&\left. - \left(\frac{1+0}{100}\right)^2 \right).
\end{aligned}
$$

Ceci donne $P(L) \simeq 0.81$.