Université Paris-Descartes.
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Probabilités et Statistique pour l'Informatique - Licence MIA 2e année
Examen partiel du 02/11/2015 - Durée : 1 heure 30

Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Exercice 1

On lance 4 fois un dé. On note X le nombre de fois où on obtient 6.

1. Pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, calculer $\mathbb{P}(X = k)$.

   X représente le nombre de succès (=avoir un 6) lors de 4 expériences de Bernoulli indépendantes, de même probabilité de succès $\frac{1}{6}$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{6}$. Donc pour tout $k \in \{0, \ldots, 4\}$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$.

2. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note X_i la variable de Bernoulli qui vaut 1 si on tire un 6 au i-ème lancer, 0 si on ne tire pas un 6 à ce lancer. Ecrire X en fonction des X_i.

   Par définition, $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

3. Donner la valeur de $\mathrm{E}(X)$ et de $\mathrm{Var}(X)$. Par résultat du cours, comme $X \sim \mathcal{B}(4, \frac{1}{6})$, on a $\mathbb{E}(X) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{V}(X) = 4\frac{1}{6}\frac{5}{6} = \frac{5}{9}$.

Exercice 2

Alice lance simultanément six dés équilibrés à six faces et gagne si elle obtient au moins un 6. Bob lance simultanément douze dés équilibrés à six faces et gagne s'il obtient au moins deux 6.

1. Soit X la variable aléatoire définie par $X = 1$ si Alice a gagné et $X = 0$ si Alice a perdu. Donner la loi de X.

   X suit une loi de Bernoulli, de paramètre p_A donné par la probabilité qu'Alice gagne. Notant D_i l'événement "le dé numéro i tombe sur 6", la probabilité recherchée est

$$\begin{aligned} p_A &= \mathbb{P}(D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_6), \\ &= 1 - \mathbb{P}(\bar{D}_1 \cap \bar{D}_2 \cap \ldots \cap \bar{D}_6), \\ &= 1 - \mathbb{P}(\bar{D}_1)\mathbb{P}(\bar{D}_2) \ldots \mathbb{P}(\bar{D}_6), \end{aligned}$$

   par indépendance des lancers. Donc

$$p_A = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.67.$$

2. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = 1$ si Bob a gagné et $Y = 0$ si Bob a perdu. Donner la loi de Y.

   De même, Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p_B donné par la probabilité que Bob gagne. Or le nombre S de 6 trouvés dans un lancer de douze dés indépendants suit une loi binomiale de paramètres 12 et $\frac{1}{6}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p_B &= \mathbb{P}(S \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(S = 0) - \mathbb{P}(S = 1), \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{11} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 2\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \approx 1 - 0.11 - 0.26 = 0.63. \end{aligned}$$

3. Qui a en moyenne la plus grande chance de gagner? Par résultat du cours, $\mathbb{E}(X) = p_A > p_B = \mathbb{E}(Y)$. Donc en moyenne, Alice gagne plus souvent que Bob.

4. Alice répète maintenant l'expérience suivante. A chaque tour elle lance simultanément six dés, et s'arrête dès qu'elle obtient au moins un 6. Soit Z le nombre de tours que doit faire Alice.

(a) Préciser, en justifiant, la loi de Z. Z représente le premier temps de succès lors d'une succession infinie d'expériences de Bernoulli indépendante, chacune de probabilité de succès donnée par $p_A = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^6$. Donc Z suit une loi géométrique de paramètre p_A.

(b) Donner la variance de Z. Par résultat du cours, $\mathbb{V}(Z) = \frac{1-p_A}{p_A^2} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^6}{\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^6\right)^2}$.

On donne: $(5/6)^6 \approx 0.33$, $(5/6)^{11} \approx 0.13$ *et* $(5/6)^{12} \approx 0.11$.

Exercice 3

Les laboratoires pharmaceutiques indiquent pour chaque test clinique sa sensibilité α, qui est la probabilité que le test soit positif sachant que le sujet est malade, et sa spécificité β, qui est la probabilité que le test soit négatif sachant que le sujet est sain. On note p la probabilité qu'un sujet soit malade.

1. Donner la probabilité pour qu'un sujet pris au hasard soit sain sachant que son test est positif.

   Soient les événements $M=$"le sujet est malade" et $T=$"le test est positif". Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(\bar{M}|T)$. Par application de la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{M}|T) = \frac{\mathbb{P}(\bar{M}\cap T)}{\mathbb{P}(T)} &= \frac{\mathbb{P}(T|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})}{\mathbb{P}(T|M)\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(T|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})},\\ &= \frac{(1-\beta)(1-p)}{\alpha p+(1-\beta)(1-p)}.\end{aligned}$$

2. Déterminer la probabilité d'être malade sachant que le test est négatif: il s'agit de calculer $\mathbb{P}(M|\bar{T})$. Par la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M|\bar{T}) = \frac{\mathbb{P}(M\cap \bar{T})}{\mathbb{P}(\bar{T})} &= \frac{\mathbb{P}(\bar{T}|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\bar{T}|M)\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(\bar{T}|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})},\\ &= \frac{(1-\alpha)p}{(1-\alpha)p+\beta(1-p)}.\end{aligned}$$

Exercice 4

On suppose que l'on a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon à la naissance. Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un garçon ?

   L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{(f,f),(g,f),(f,g),(g,g)\}$. La probabilité sur Ω est la probabilité uniforme. La probabilité recherchée est alors $\frac{3}{4}$.

2. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant que l'aînée est une fille ?

   Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(\{(f,g)\}|\{(f,f),(f,g)\}) = \frac{\mathbb{P}(\{(f,g)\})}{\mathbb{P}(\{(f,f),(f,g)\})} = \frac{1}{2}$.

3. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?

   Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(\{(f,g),(g,f),(g,g)\}|\{(f,f),(f,g),(g,f)\}) = \frac{\mathbb{P}(\{(f,g),(g,f)\})}{\mathbb{P}(\{(f,f),(f,g),(g,f)\})} = \frac{2}{3}$.

4. **Question Bonus *** Vous téléphonez à votre voisin. Une fille décroche le téléphone. Vous savez que dans les familles avec un garçon et une fille, la fille décroche le téléphone avec probabilité $p = 3/4$, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?

   Soient les événements $T=$"Le téléphone est décroché par une fille", $G=$"le voisin a au moins un garçon", $F=$"le voisin a au moins une fille". Il s'agit de calculer $\mathbb{P}(G|T)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(G|T) = \frac{\mathbb{P}(G\cap T)}{\mathbb{P}(T)}$$

   D'une part,

$$\mathbb{P}(G\cap T) = \mathbb{P}(G\cap T\cap F) + \mathbb{P}(G\cap T\cap \bar{F}).$$

   La seconde probabilité est nulle car $T\cap\bar{F} = \emptyset$. Par ailleurs,

$$\mathbb{P}(G\cap T\cap F) = \mathbb{P}(T|G\cap F)\mathbb{P}(G|F)\mathbb{P}(F) = p\frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{p}{2}.$$

De plus,
$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T|G \cap F)\mathbb{P}(G \cap F) + \mathbb{P}(T|\bar{G})\mathbb{P}(\bar{G}) + \mathbb{P}(T|\bar{F})\mathbb{P}(\bar{F}).$$
Ainsi,
$$\mathbb{P}(T) = \frac{p}{2} + \frac{1}{4} + 0.$$
Par conséquent,
$$\mathbb{P}(G|T) = \frac{p/2}{p/2 + 1/4} = \frac{2p}{2p+1} = \frac{3/2}{3/2+1} = \frac{3}{5}.$$