

Probabilités et statistiques pour l'informatique - Licence MIA 2e année  
Examen de deuxième session - 22 juin 2016 - Durée : 1 heure 30

*Tous les documents et les appareils électroniques sont interdits*

### Exercice 1

On sait que 5% de la population est atteinte d'une certaine maladie. On dispose d'un test de dépistage de cette maladie tel que si la personne est malade, le test est positif avec une probabilité de 95%. De plus si on teste au hasard une personne dans la population, le test est positif avec probabilité 5.7%.

1. Quelle est la probabilité que le test soit positif sachant que la personne testée n'est pas malade ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade sachant que son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne d'être saine sachant que son test est négatif ?

### Exercice 2

Soit  $\alpha$  un nombre réel. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on pose

$$f(t) = \begin{cases} \alpha t^4 & \text{si } t \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la constante  $\alpha$  pour que  $f$  corresponde à une densité de probabilité. Dans la suite on suppose que  $\alpha$  est égal à cette valeur.
2. Tracer la courbe représentative de  $f$ .
3. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ . Calculer  $E(X)$  ainsi que  $V(X)$ .
4. Calculer  $P(-1 \leq X \leq -1/2)$  et  $P(0 \leq X \leq 1/2)$ .
5. Calculer la fonction de répartition  $F$  de la variable  $X$  et la représenter sur un graphique.

### Exercice 3

On considère le jeu de dé suivant : on lance un dé à six faces plusieurs fois de suite jusqu'à obtenir 1, 2, 3 ou 4 (donc on le relance seulement si on tombe sur 5 ou 6). On note  $N$  le nombre de lancers de dé total, et on suppose que l'on gagne ou perd de l'argent suivant la règle suivante : si  $N = 1$  on perd 100 euros, si  $N = 2$  on ne gagne ni ne perd rien, si  $N = 3$  on gagne 300 euros, si  $N = 4$  on gagne 600 euros, si  $N = 5$  on gagne 1200 euros, et ainsi de suite en doublant le gain pour chaque nouvelle valeur de  $N$ . Plus précisément si on note  $G$  le gain obtenu, on a

$$\begin{cases} N = 1 \Leftrightarrow G = -100, \\ N = 2 \Leftrightarrow G = 0, \\ N = k \Leftrightarrow G = 2^{k-3} \times 300 \text{ si } k \geq 3, \end{cases}$$

un gain négatif signifiant une perte.

1. Quelle est la loi de  $N$  ? Quelle est l'espérance de  $N$  et sa variance ?
2. Quelle est la loi de  $G$  ? Quelle est la probabilité de gagner plus de 1000 euros à ce jeu ?
3. Calculer l'espérance de  $G$ .
4. Écrire en langage R une fonction `jeu = fonction()` qui simule ce jeu et renvoie le gain  $G$  à l'issue du jeu.