Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Probabilités et statistiques pour l'informatique - Licence MIA 2e année
Examen de deuxième session - 22 juin 2016 - Correction

Exercice 1

On considère un individu choisi au hasard dans la population et à qui on fait passer le test, et on note M l'événement "il est atteint de la maladie" et T l'événement "le test est positif". D'après l'énoncé on a :

$$P(M) = 0.05, \quad P(T) = 0.057, \quad P(T|M) = 0.95.$$

1. La formule des probabilités totales donne

$$P(T) = P(T|M)P(M) + P(T|M^c)P(M^c),$$

et donc

$$P(T|M^c) = \frac{P(T) - P(T|M)P(M)}{P(M^c)} = \frac{0.057 - 0.95 \times 0.05}{1 - 0.05} = \frac{0.057 - 0.0475}{0.95} = \frac{0.0095}{0.95} = \frac{1}{100}.$$

Ainsi la probabilité que le test soit positif sachant que la personne testée n'est pas malade est de 1%.

2. On a

$$P(M|T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T)} = \frac{0.95 \times 0.05}{0.057} = \frac{0.0475}{0.057} \simeq 0.83.$$

Donc la probabilité pour une personne d'être malade sachant que son test est positif est de 83%.

3. On a

$$\begin{aligned} P(M^c|T^c) &= \frac{P(M^c \cap T^c)}{P(T^c)} = \frac{P(T^c|M^c)P(M^c)}{P(T^c)} = \frac{(1 - P(T|M^c))P(M^c)}{P(T^c)} \\ &= \frac{(1 - 0.01) \times 0.95}{1 - 0.057} = \frac{0.99 \times 0.95}{0.943} \simeq 0.997. \end{aligned}$$

Donc la probabilité pour une personne d'être saine sachant que son test est négatif est de 99.7%.

Exercice 2

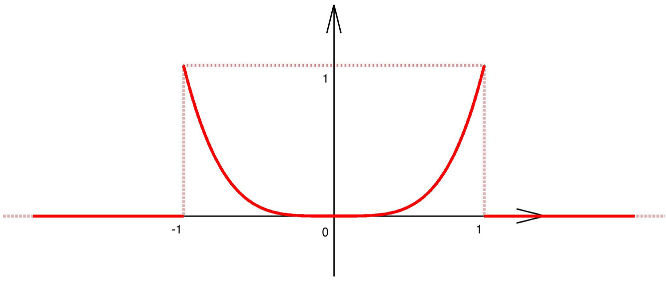
1. Premièrement si $\alpha \geq 0$ on a $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est une condition nécessaire pour que f soit une densité de probabilité. De plus on doit avoir

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1,$$

ce qui donne

$$\int_{-1}^{1} \alpha t^4 dt = \alpha \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \alpha(1/5 - (-1/5)) = \frac{2\alpha}{5} = 1,$$

donc si $\alpha = \frac{5}{2}$, f est bien une densité de probabilité.



2.

3.

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} tf(t)dt = \int_{-1}^{1} t\alpha t^4 dt = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} t^5 dt = \frac{5}{2}\left[\frac{t^6}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{5}{2}(1/6 - 1/6) = 0.$$

Ainsi $E(X) = 0$. (on aurait pu le dire directement en remarquant que f est une fonction paire).

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) = E((X-0)^2) = E(X^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)dt = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} t^6 dt = \frac{5}{2}\left[\frac{t^7}{7}\right]_{-1}^{1} = \frac{5}{2}(1/7 - (-1/7)) = \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} P(-1 \leq X \leq -1/2) &= \int_{-1}^{-1/2} f(t)dt = \frac{5}{2}\int_{-1}^{-1/2} t^4 dt = \frac{5}{2}\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2}((-1/2)^5 - (-1)^5) = \frac{1}{2}(-1/32 + 1) = \frac{31}{64} \simeq 48\%. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 1/2) &= \int_{0}^{1/2} f(t)dt = \frac{5}{2}\int_{0}^{1/2} t^4 dt = \frac{5}{2}\left[\frac{t^5}{5}\right]_{0}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}((1/2)^5 - (0)^5) = \frac{1}{2}(1/32 - 0) = \frac{1}{64} \simeq 1.6\%. \end{aligned}$$

5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a par définition $F(t) = P(X \leq t)$. Donc

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)ds.$$

— Si $t < -1$ alors $F(t) = 0$ car $f(s) = 0$ pour tout $s < -1$.

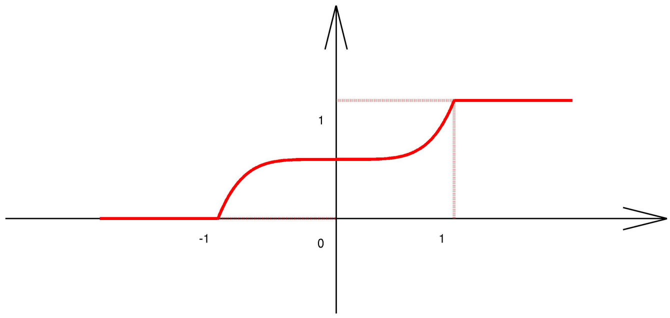
— Si $-1 \leq t \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{5}{2}\int_{-1}^{t} s^4 ds = \frac{5}{2} \times \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{t} = \frac{5}{2} \times \left(\frac{t^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(t^5 + 1\right) = \frac{1+t^5}{2}. \end{aligned}$$

— Si $t > 1$ alors $F(t) = 1$ car alors $\int_{-\infty}^{t} f(s)ds = \int_{-1}^{1} f(s)ds$.

Donc pour résumer,

$$F(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < -1, \\ \frac{1+t^5}{2} \text{ si } -1 \leq t \leq 1, \\ 1 \text{ si } t > 1. \end{cases}$$



Exercice 3

1. N correspond au rang du premier "succès" (obtenir 1, 2, 3 ou 4 au lancer) lors de la répétition d'expériences indépendantes et de même loi (lancers de dé). Donc N suit la loi géométrique de paramètre $p = 4/6 = 2/3$ (probabilité d'obtenir 1, 2, 3 ou 4 lors d'un lancer). On a pour tout $k \geq 1$,

$$P(N = k) = p(1-p)^{k-1} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3^k}.$$

L'espérance de N est $E(N) = \frac{1}{p} = \frac{3}{2}$ et la variance de N est $V(N) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$.

2. G suit une loi discrète dont le support est $\{-100, 0, 300, 600, 1200, 2400, \ldots\}$. On a

$$P(G = -100) = P(N = 1) = \frac{2}{3},$$

$$P(G = 0) = P(N = 2) = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9},$$

$$P(G = 300) = P(N = 3) = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27},$$

$$P(G = 600) = P(N = 4) = \frac{2}{3^4} = \frac{2}{81},$$

et plus généralement pour tout $k \geq 3$,

$$P(G = 2^{k-3} \times 300) = P(N = k) = \frac{2}{3^k}.$$

La probabilité de gagner plus de 1000 euros à ce jeu correspond à la probabilité que N soit au moins égal à 5 (puisque le gain est supérieur à 1000 à partir de $N = 5$). On a donc

$$\begin{aligned} P(G \geq 1000) &= P(N \geq 5) = \sum_{k \geq 5} P(N = k) = \sum_{k \geq 5} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3^5} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{3^k} \\ &= \frac{2}{3^5} \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{2}{3^5} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
E(G) &= (-100)\times P(G=-100) + 0\times P(G=0) + 300\times P(G=300) + 600\times P(G=600) + \cdots \\
&= -100\times\frac{2}{3} + 0 + \sum_{k\geq 3}\left(2^{k-3}\times 300\right)\times\frac{2}{3^k} \\
&= -\frac{200}{3} + 0 + 300\times 2\times\sum_{k\geq 3}\frac{2^{k-3}}{3^k} \\
&= -\frac{200}{3} + 0 + 300\times\frac{2}{3^3}\times\sum_{k\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\
&= -\frac{200}{3} + 0 + 100\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{1-2/3} \\
&= -\frac{200}{3} + 0 + 100\times\frac{2}{9}\times 3 \\
&= -\frac{200}{3} + 0 + 100\times\frac{2}{3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi $E(G)=0$.

4. Il y a plusieurs façons d'écrire la fonction. Voici une solution : on calcule d'abord N avec une boucle "while" : on initialise $N=1$ (premier lancer), puis tant qu'un lancer de dé (sample(1 :6,1)) donne un résultat plus grand que 5, on compte un lancer supplémentaire (N = N+1). Ensuite on affecte la valeur de G en fonction de celle de N en séparant les cas $N=1$, $N=2$ ou $N\geq 3$ en suivant la formule de l'énoncé.

```
jeu = function()
{
  N = 1
  while(sample(1:6,1)>=5)
    N = N+1
  if(N==1)
    G = -100
  else if(N==2)
    G = 0
  else
    G = 2^{N-3}*300
  G
}
```

Voici une deuxième solution en se servant du fait que N suit la loi géométrique de paramètre 2/3, pour laquelle il existe une fonction prédéfinie en R. Ceci permet d'éviter la première boucle ; la suite est identique. Cependant il faut faire attention à ajouter un à la valeur tirée au sort car la loi géométrique en R a pour support $\mathbb{N}$ et pas $\mathbb{N}^*$: le rang de première apparition est compté à partir de 0 et pas de 1.

```
jeu = function()
{
  N = rgeom(1,2/3)
```

```
  if(N==1)
    G = -100
  else if(N==2)
    G = 0
  else
    G = 2^{N-3}*300
  G
}
```