Géométrie et espaces de formes 2020/2021 - TP 3

Modèle difféomorphique et construction d'atlas

Nous allons voir ici comment réaliser un modèle de construction d'atlas pour l'étude d'une population de formes. Autrement dit, à partir de la donnée de N formes similaires S^k, nous cherchons à obtenir conjointement une forme moyenne (le prototype) $\bar{S}$ et des déformations optimales ϕ^k entre $\bar{S}$ et S^k. La donnée finale des N transformations ϕ^k permet alors d'effectuer une étude statistique sur la population.

Nous supposerons dans un premier temps que les formes considérées sont données par des ensembles de points : $S^k = \mathbf{x}^k = (x_i^k)_{1 \le i \le n_k} \in (\mathbb{R}^d)^{n_k}$.

Premier modèle : déformations paramétrées par les points du prototype

Nous considérons d'abord la fonctionnelle suivante :

$$\tilde{J}(\{\phi^k\}_{1 \le k \le N}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \gamma d_V(\mathrm{id}\,, \phi^k)^2 + A_k(\phi^k(\bar{\mathbf{x}})) \right\},$$

où V est un espace de Hilbert de champs de vecteurs,

$$d_V(\mathrm{id}\,, \phi^k)^2 = \inf \left\{ \int_0^1 \|v(t,\cdot)\|_V^2 \, dt, \;\; \phi^v(1,\cdot) = \phi^k \right\}$$

avec ϕ^v le flot des champs $v(t,\cdot)$, $\gamma > 0$ un paramètre, et A_k est la fonctionnelle d'attache aux données pour la forme $\mathbf{x}^k$, tandis que $\bar{x}$ est la "forme" (ensemble de points ici) prototype à optimiser. Le nombre de points n de $\bar{x}$ est fixé. Pour un tel problème, comme pour le problème d'appariement simple, les transformations optimales ϕ^k sont paramétrées par des vecteurs $p_i(0)^k$ (appelés moments initiaux) attachés aux points $\bar{x}_i$, et le problème revient à minimiser

$$J(\{\boldsymbol{p}^k(0)\}_{1 \le k \le N}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \gamma \left\langle \boldsymbol{p}^k(0)\,, K_V(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) \boldsymbol{p}^k(0) \right\rangle + A_k(\boldsymbol{q}^k(1)) \right\},$$

où $\boldsymbol{p}^k(t), \boldsymbol{q}^k(t)$ suivent les équations géodésiques (cf 2e TP), avec $\boldsymbol{q}^k(0) = \bar{\mathbf{x}}$.

1. Dans un premier temps on considère que les formes correspondent à des configurations de points en correspondance : on a donc $n_k = n$ et on choisit $A_k(\boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{z} - \mathbf{x}^k\|^2$.
   Adapter le code exemple d'appariement difféomorphique pour obtenir ce modèle de construction d'atlas,
2. Le fichier *synth_20.pt* contient une liste `x` de 20 configurations de $n = 44$ points dans le plan. Afficher ces configurations.
3. Tester la méthode de construction d'atlas avec ces données, puis afficher les positions des points x_i^k, $\bar{x}_i$ et $\phi^k(\bar{x}_i)$ après minimisation.
4. A partir des vecteurs $\boldsymbol{p}^k(0)$, réaliser une Analyse en Composantes Principales (utiliser la fonction `PCA` fournie) afin d'extraire les directions principales de déformation de la population. Afficher les formes correspondant à la moyenne et aux deux premières directions principales de déformation.
5. Calculer les $C(i,k)$ pour $1 \le i \le N$ et $1 \le k \le 3$ correspondant aux coordonnées des données projetées sur les trois premiers axes principaux, puis visualiser la population de formes dans ces coordonnées projetées.

Deuxième modèle : dissociation des points de contrôle et du prototype

A présent on introduit des variables supplémentaires $(c_i)_{1\leq i\leq n_c}$ correspondant aux points de contrôle des déformations ϕ^k, supposées dissociées des points du prototype. Les déformations ϕ^k sont alors paramétrées par ces points et les vecteurs $(p_i^k(0))_{1\leq i\leq n_c}$: et le problème consiste alors à minimiser

$$J(\{\boldsymbol{p}^k(0)\}_{1\leq k\leq N}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{c}) = \sum_{k=1}^{N} \left\{\gamma \left\langle \boldsymbol{p}^k(0)\, , K_V(\mathbf{c}, \mathbf{c})\boldsymbol{p}^k(0)\right\rangle + A_k(\phi^k(\bar{\mathbf{x}})\right\}.$$

6. Ecrire les fonctions permettant de calculer la fonctionnelle. Faire des essais avec les données précédentes, avec par exemple $n_c = 3$. Afficher la forme prototype optimale ainsi que les positions des points de contrôle c_i.

Attaches aux données géométriques

Pour terminer nous allons réaliser une étude dans un cadre légèrement différent : les données ne seront plus des configurations de points (landmarks) mais des nuages de points non ordonnés. Il faut alors remplacer les fonctionnelles d'attache aux données A_k par des fonctionnelles appropriées afin de quantifier la similarité entre deux nuages de points. Nous allons utiliser directement - sans l'étudier - le modèle des mesures qui définit une distance entre masses de Dirac pondérées.

7. Recommencer l'étude (construction d'atlas et ACP) avec les données du fichier *real_100.pt* (obtenues à partir d'images binaires de chiffres 3 manuscrits), en utilisant la fonction `lossmeas` fournie pour calculer les nouvelles fonctionnelles A_k.