PARIS DESCARTES
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation, Licence 3ème année

Examen 1ère session, Jeudi 6 janvier 2011, durée = 1h30

Les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et tout appareil électronique. La notation tiendra compte du soin et de la qualité de la rédaction. Les barêmes ne sont donnés qu'à titre indicatif.

Exercice 1 (5 pts) Déterminer les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 3xy^2 - y^3 + x^2 + y^2 - 1.$$

Exercice 2 (5 pts) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = (1+z)x^2 + y^2 + zx - 2y.$$

Déterminer les points critiques de f et étudier leur nature.

Exercice 3 (4 pts) Trouver les points critiques du problème de la minimisation de la fonction

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^9 + \frac{1}{18}y^4 - 1,$$

sous la contrainte $\{(x,y), 9x^3 + y^2 + 8 = 0\}$. On n'étudiera pas la nature des points critiques.

Exercice 4 (6 pts) On considère la fonctionnelle quadratique J définie pour tout x de $\mathbb{R}^n$ par

$$J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle,$$

où b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et A une matrice symétrique définie positive. On définit le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n, Cx = d\}$$

où C est une matrice de taille $p \times n$ et d est un vecteur de $\mathbb{R}^p$, avec $0 < p < n$.
On note $d(x,y) = \sqrt{\langle A(x-y), (x-y)\rangle}$.

1. Déterminer le gradient et la hessienne de J en tout point x de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que d est une distance.
3. Montrer que l'ensemble F est fermé et convexe. F est-il un sous-espace vectoriel ?
4. Prouver que $J(x) = \frac{1}{2}d^2(x,e) + k$, où $e \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{R}$ sont à préciser.
5. Justifier l'existence et l'unicité d'un minimum de J sur F.
6. A l'aide des multiplicateurs de Lagrange, écrire une condition nécessaire de réalisation d'un minimum de J sur F.