Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen du 17/01/2012 - Durée : 1 heure 30

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, trouver les points critiques de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ puis déterminer leur type en fonction des propriétés de la matrice hessienne de f en ces points.

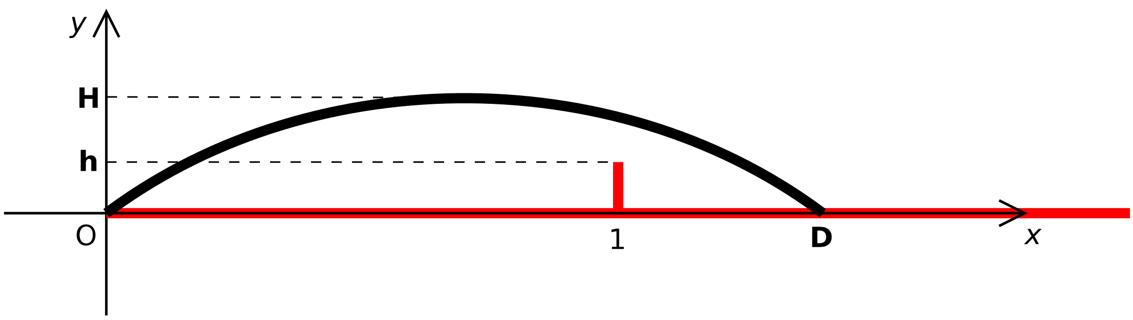
1. $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 - x_2)^2$.
2. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1^3$.

Exercice 2 Soit $y \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \text{Minimiser} \quad J(x_1, x_2) = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - \sqrt{2}x_2)^2, \\ \text{sous la contrainte} \quad x_1^2 + 2x_2^2 = 1. \end{cases}$$

1. Justifier l'existence d'une solution au problème.
2. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, trouver les points critiques de la fonctionnelle J sur l'ensemble des contraintes K, et en déduire la ou les solutions du problème en fonction de la position du point y.
3. Trouver un changement de coordonnées $(x_1, x_2) \mapsto (X_1, X_2)$ tel que K devienne le cercle unité pour les nouvelles coordonnées. Ecrire le problème de minimisation dans ce nouveau système de coordonnées. Interpréter géométriquement le problème et ses solutions.

Exercice 3



La figure ci-dessus représente la trajectoire d'une balle de tennis lancée depuis le fond du court au niveau du sol (position origine), en direction de l'autre moitié de terrain. Cette trajectoire est une parabole d'équation $y = f(x) = \alpha x^2 + \beta x$, avec $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. La balle doit passer au dessus du filet, de hauteur $h = \frac{1}{10}$ et positionné en $x = 1$, et on veut obtenir une trajectoire la plus courte et la moins haute possible (coup "amorti"). Pour cela on cherche à minimiser la fonctionnelle $J(\alpha, \beta) = H + \frac{1}{5}D$, où H est la hauteur maximale atteinte par la balle lors de sa trajectoire, et D la distance jusqu'au premier rebond.

1. Exprimer les quantités H et D en fonction des paramètres α et β de la trajectoire. En déduire l'expression de la fonctionnelle $J(\alpha, \beta)$.
2. Exprimer la condition de franchissement du filet sous la forme d'une condition $g(\alpha, \beta) \leq 0$.
3. Représenter graphiquement dans le plan de coordonnées α, β l'ensemble K des contraintes.
4. Déterminer le ou les points critiques de la fonctionnelle J sur l'ensemble K, et en déduire la solution (α^*, β^*) du problème.