Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen du 17/01/2012 - Correction

Exercice 1

1. f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$; son gradient et sa matrice hessienne sont donc définies en tout point. Le gradient de f est

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 2x_1 + 2x_2 \\ 4x_2^3 + 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Les points critiques de f correspondent aux zéros du gradient. On a

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_1, x_2) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_2^3 + 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4(x_1^3 + x_2^3) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x_1^3 - 4x_1 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1(x_1^2 - 1) = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1^2 = 1 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc $(0, 0)$, $(1, -1)$ et $(-1, 1)$. Ensuite on a

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12x_2^2 - 2 \end{pmatrix},$$

donc

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad H_f(1, -1) = H_f(-1, 1) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la première matrice s'écrit $\chi(\lambda) = (-2-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda + 4)$, donc les valeurs propres de $H_f(0, 0)$ sont 0 et -4. Dans ce cas on ne peut pas conclure a priori quant au type de point critique (extremum local ou point selle). Cependant on a :
• $f(0, 0) = 0$ et $f(x_1, x_1) = 2x_1^4 > 0$ pour $x_1 \neq 0$, donc $(0, 0)$ est minimum local de f sur la droite $\text{Vect}\{(1, 1)\}$,
• $f(x_1, -x_1) = 2x_1^4 - 4x_1^2 = 2x_1^2(x_1^2 - 2) < 0$ pour $x_1 \neq 0$ et x_1 proche de 0, donc $(0, 0)$ est maximum local de f sur la droite $\text{Vect}\{(1, -1)\}$.
Par conséquent $(0, 0)$ **est un point selle** de f.
Le polynôme caractéristique de $H_f(1, -1)$ est égal à $\chi(\lambda) = (10 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 + 100 - 20\lambda - 4 = \lambda^2 - 20\lambda + 96$. On a $\Delta = 400 - 4 * 96 = 16 = 4^2$, donc les valeurs propres de $H_f(1, -1)$ sont $\lambda = \frac{1}{2}(20 - 4) = 8$ et $\lambda = \frac{1}{2}(20 + 4) = 12$, qui sont strictement positives. Par conséquent $(1, -1)$ **et** $(-1, 1)$ **sont des minimums locaux** de f.

2. f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$; son gradient et sa matrice hessienne sont donc définies en tout point. Le gradient de f est

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_1^2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_1^2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1(2 + 3x_1) = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc $(0,0)$ et $(-\frac{2}{3}, 0)$. Ensuite on a

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 + 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H_f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres se lisent directement ici puisque les matrices sont diagonales. On voit donc que $(0,0)$ **est un minimum local**, tandis que $(-\frac{2}{3}, 0)$ **est un point selle**.

Exercice 2

1. L'ensemble K des contraintes a pour équation $x_1^2 + 2x_2^2 = 1$, qui est l'équation d'une ellipse. Par conséquent K est un ensemble fermé est borné de $\mathbb{R}^2$. Ainsi le problème consiste à minimiser une fonction J, qui est clairement continue, sur un ensemble compact. Il admet donc au moins une solution.
2. Notons $h(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 1$. h est une fonction C^∞ et son gradient s'écrit

$$\nabla h(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$$

qui est non nul pour tout point de l'ensemble K (∇h est nul en $(0,0)$ mais ce point n'est pas dans K). On trouve donc tous les points critiques de J sur K en résolvant le système

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \nabla J(x_1, x_2) + \lambda \nabla h(x_1, x_2) = 0 \\ h(x_1, x_2) = 0 \end{array} \right. \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2(x_1 - y_1) + 2\lambda x_1 = 0 \\ 2\sqrt{2}(\sqrt{2}x_2 - y_2) + 4\lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 + \lambda)x_1 = y_1 \\ \sqrt{2}(1 + \lambda)x_2 = y_2 \\ x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

A présent distingue deux cas :
• Si $y_1 = y_2 = 0$, alors nécessairement $\lambda = -1$ (car sinon $x_1 = x_2 = 0$, ce qui est impossible d'après la troisième équation). Le système est donc équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ x_1^2 + 2x_2^2 \end{array} \right. ,$$

ce qui signifie que dans ce cas, **tout point de K est point critique** de J. Or on remarque que si $y_1 = y_2 = 0$ on a $J(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 = h(x_1, x_2) = 1$ pour tout point $x \in K$. Par conséquent dans ce cas J est constante sur K et donc **tout point de K est solution**.
• Si $y_1 \neq 0$ ou $y_2 \neq 0$, alors nécessairement $\lambda \neq -1$ (car sinon $y_1 = y_2 = 0$ d'après les deux premières équations), et le système est équivalent à

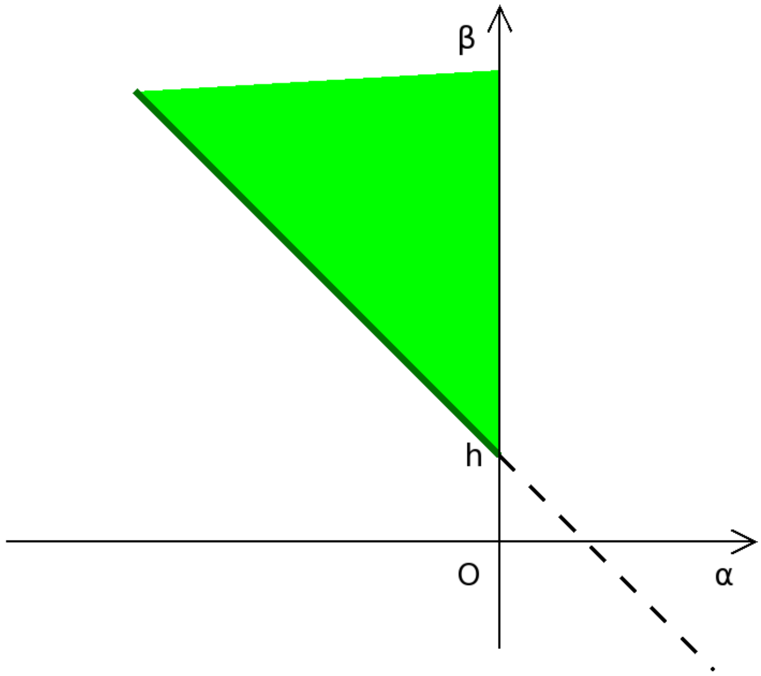
$$\frac{y_1^2}{(1+\lambda)^2} + 2\frac{y_2^2}{2(1+\lambda)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1^2 + y_2^2 = (1+\lambda)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \|y\| - 1 \text{ ou } \lambda = -\|y\| - 1,$$

avec $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$.
On obtient donc **deux points critiques** dans ce cas : $x = (\frac{y_1}{\|y\|}, \frac{y_2}{\sqrt{2}\|y\|})$ et $x = (-\frac{y_1}{\|y\|}, -\frac{y_2}{\sqrt{2}\|y\|})$.
On compare ensuite les valeurs de J en ces points :
$J(\frac{y_1}{\|y\|}, \frac{y_2}{\sqrt{2}\|y\|}) = (y_1 - \frac{y_1}{\|y\|})^2 + (y_2 - \sqrt{2}\frac{y_2}{\sqrt{2}\|y\|})^2 = (1 - \frac{1}{\|y\|})^2(y_1^2 + y_2^2) = (\|y\| - 1)^2$,
$J(-\frac{y_1}{\|y\|}, -\frac{y_2}{\sqrt{2}\|y\|}) = (y_1 + \frac{y_1}{\|y\|})^2 + (y_2 + \sqrt{2}\frac{y_2}{\sqrt{2}\|y\|})^2 = (1 + \frac{1}{\|y\|})^2(y_1^2 + y_2^2) = (\|y\| + 1)^2$.
Or $(\|y\| + 1)^2 - (\|y\| - 1)^2 = 4\|y\| > 0$, et par conséquent dans ce cas $(\frac{y_1}{\|y\|}, \frac{y_2}{\sqrt{2}\|y\|})$ **est l'unique minimum** de J sur K (et le point opposé est l'unique maximum).

3. En posant $X_1 = x_1$ et $X_2 = \sqrt{2}x_2$, l'équation de K devient $X_1^2 + X_2^2 = 1$, qui est l'équation du cercle unité. De plus la fonctionnelle J se réécrit $\tilde{J}(X_1, X_2) = J(x_1, x_2) = (y_1 - X_1)^2 + (y_2 - X_2)^2 = \|y - X\|^2$. Par conséquent on voit que le problème consiste à trouver le point X du cercle unité le plus proche de y. On vérifie ainsi que le résultat trouvé précédemment est correct : lorsque $y \neq (0,0)$, le point le plus proche de y sur le cercle est égal à $X = \frac{y}{\|y\|}$, ce qui correspond bien à la solution trouvé si on revient aux coordonnées initiales. Lorsque $y = (0,0)$, tout point du cercle est à distance 1 de y.

Exercice 3

1. • La hauteur maximale de la trajectoire correspond au maximum de f ; qu'on obtient en trouvant le zéro de sa dérivée : $f'(x) = 2\alpha x + \beta$, donc f' s'annule en $-\frac{\beta}{2\alpha}$, et donc $H = f(-\frac{\beta}{2\alpha}) = \alpha(\frac{\beta}{2\alpha})^2 - \beta(\frac{\beta}{2\alpha}) = -\frac{\beta^2}{4\alpha}$.
   • La distance D correspond au deuxième zéro de f (le premier étant $x = 0$). Or $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(\alpha x + \beta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = -\frac{\beta}{\alpha}$. Donc $D = -\frac{\beta}{\alpha}$.
   Finalement, $J(\alpha, \beta) = -\dfrac{\beta^2}{4\alpha} - \dfrac{\beta}{5\alpha}$.
2. La condition s'écrit $f(1) \geq h$ (en admettant le cas où la balle passe exactement au sommet du filet), ce qui donne $\alpha + \beta \geq h = \frac{1}{10}$, soit encore $g(\alpha, \beta) = \frac{1}{10} - \alpha - \beta \leq 0$.
3. L'ensemble des contraintes est inclus dans le domaine $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^* = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < 0, \beta > 0$ par hypothèse. Dans ce domaine la seule condition imposée est $g(\alpha, \beta) = h - \alpha - \beta \leq 0$, ce qui donne l'ensemble représenté en vert ci-dessous, avec la frontière inférieure (demi-droite en vert foncé) comprise, la frontière droite (axe vertical) exclue, et l'ensemble étant prolongé à l'infini vert le haut.



4. J et g sont des fonctions de classe C^∞. On a

$$\nabla J(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\beta}{5\alpha^2}\\ -\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{1}{5\alpha}\end{pmatrix},\qquad \nabla g(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

∇g ne s'annule jamais ; par conséquent tout extremum local vérifie le critère d'optimalité. On distingue deux cas :

• Si la contrainte g est inactive ($g(\alpha,\beta)<0$), alors la condition s'écrit $\nabla J(\alpha,\beta)=0$, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\beta}{5\alpha^2}=0\\ -\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{1}{5\alpha}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\beta(\frac{\beta}{4}+\frac{1}{5})=0\\ -\frac{\beta}{2}-\frac{1}{5}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\beta=0\\ \beta=-\frac{2}{5}\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}\beta=-\frac{4}{5}\\ \beta=-\frac{2}{5}\end{array}\right.,$$

ce qui est impossible.

• Si la contrainte est active ($g(\alpha,\beta)=0$), alors la condition s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla J(\alpha,\beta)+\lambda\nabla g(\alpha,\beta)=0\\ g(\alpha,\beta)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\beta}{5\alpha^2}-\mu=0\\ -\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{1}{5\alpha}-\mu=0\\ \frac{1}{10}-\alpha-\beta=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{\beta^2}{4}+\frac{\beta}{5}=\alpha^2\mu\\ -\frac{\alpha\beta}{2}-\frac{\alpha}{5}=\alpha^2\mu\\ \alpha=\frac{1}{10}-\beta\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{\beta^2}{4}+\frac{\beta}{5}=-\frac{\alpha\beta}{2}-\frac{\alpha}{5}\\ -\frac{\alpha\beta}{2}-\frac{\alpha}{5}=\alpha^2\mu\\ \alpha=\frac{1}{10}-\beta\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{\beta^2}{4}+\frac{\beta}{5}+\frac{(\frac{1}{10}-\beta)\beta}{2}+\frac{\frac{1}{10}-\beta}{5}=0\\ -\frac{\alpha\beta}{2}-\frac{\alpha}{5}=\alpha^2\mu\\ \alpha=\frac{1}{10}-\beta\end{array}\right..$$

Or

$$\frac{\beta^2}{4}+\frac{\beta}{5}+\frac{(\frac{1}{10}-\beta)\beta}{2}+\frac{\frac{1}{10}-\beta}{5}=-\frac{\beta^2}{4}+\frac{\beta}{20}+\frac{1}{50}=\frac{1}{100}(-25\beta^2+5\beta+2)$$

On a ici $\Delta = 5^2 - 4(-25)2 = 25 + 200 = 225 = 15^2$, donc les racines de ce polynôme sont $\beta = \frac{-5-15}{-2*25} = \frac{2}{5}$ et $\beta = \frac{-5+15}{-2*25} = -\frac{1}{5}$. Seule la première solution est acceptable car $\beta > 0$. On en déduit $\beta = \frac{2}{5}$, puis $\alpha = \frac{1}{10} - \beta = -\frac{3}{10}$, puis $\mu = -\frac{\beta}{2\alpha} - \frac{1}{5\alpha} = -\frac{\frac{2}{5}}{2(-\frac{3}{10})} - \frac{1}{5(-\frac{3}{10})} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Ainsi $(\alpha^*, \beta^*) = (-\frac{3}{10}, \frac{2}{5})$ **est le seul point critique de J sur K.**

Pour conclure il reste à montrer que J admet bien un minimum sur K. Pour cela on peut regarder le comportement de J lorsque α tend vers 0 et lorsque β tend vers $+\infty$. Or

$$J(\alpha, \beta) = -\frac{1}{\alpha}(\frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta}{5}) \geq -\frac{1}{\alpha}(\frac{h^2}{4} + \frac{h}{5}),$$

car $\beta \geq h$ sur K. Donc $J(\alpha, \beta)$ tend uniformément vers $+\infty$ lorsque α tend vers 0. De même on a $\alpha \geq h - \beta$, donc $-\frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\beta - h}$, et donc

$$J(\alpha, \beta) \geq \frac{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta}{5}}{\beta - h} \geq,$$

ce qui tend vers $+\infty$ lorsque β tend vers $+\infty$. Par conséquent J tend aussi uniformément vers $+\infty$ lorsque β tend vers $+\infty$. Par conséquent J étant continue admet un minimum sur K, et comme tout minimum doit être nécessairement un point critique, **on en conclue que** $(\alpha^*, \beta^*) = (-\frac{3}{10}, \frac{2}{5})$ **est l'unique minimum de J sur K.**
La trajectoire correspondant aux paramètres optimaux est représentée ci-dessous.