Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen du 7 janvier 2013

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On définit l'application $T : E \to E$ par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad (T(f))(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Montrer que T est linéaire continue et calculer $|||T|||$.

Exercice 2 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Donner l'expression de la matrice hessienne $H_f(x,y)$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Pour chaque point critique de f, dire s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle.
4. Quels sont les extremums globaux de f sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 Soient f, h_1 et h_2 les fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies par $\forall x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = x_1 - x_2x_3, \qquad h_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1, \qquad h_2(x) = x_1^2 + x_3^2 - 1.$$

On note les ensembles

$$C_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, h_1(x) = 0\},$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R}^3, h_2(x) = 0\},$$
$$C = C_1 \cap C_2.$$

On considère le problème d'optimisation (P) : minimiser la fonction f sur l'ensemble C.

1. Quelles sont les formes géométriques de C_1 et C_2 ? Dessiner ces deux ensembles sur un même graphique. Montrer que C est un ensemble fermé borné.
2. Montrer que f admet un minimum sur l'ensemble C.
3. Ecrire les conditions d'optimalité pour la minimisation de f sur C et en déduire la ou les solutions du problème (P).
4. Montrer que C est la réunion de deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dont on donnera des paramétrisations. Quelle est la nature géométrique de ces courbes ? Représenter ces deux courbes sur le dessin précédent.
5. A l'aide des paramétrisations précédentes, retrouver la ou les solutions du problème (P).