Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Correction de l'examen du 7 janvier 2013

Exercice 1 Même si la question n'était pas posée, une première chose serait de vérifier que l'application T est bien définie sur E et qu'elle est à valeurs dans E. Une fonction continue est intégrable sur tout intervalle borné, donc T est bien définie. De plus pour tout $f \in E$ et $x, y \in [0,1]$, on a si $x \le y$,

$$|(T(f))(x) - (T(f))(y)| \le \int_x^y |f(t)|dt \le (y-x)\|f\|_\infty,$$

et si $y \le x$, $|(T(f))(x) - (T(f))(y)| \le (x-y)\|f\|_\infty$. Donc dans les deux cas $|(T(f))(x) - (T(f))(y)| \le |y-x|\|f\|_\infty$, ce qui tend vers 0 lorsque y tend vers x. Ainsi $T(f)$ est une fonction continue, et donc T est bien à valeurs dans E.

Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}(T(\lambda f + \mu g))(x) &= \int_0^x (\lambda f + \mu g)(t)dt \\ &= \int_0^x \lambda f(t) + \mu g(t)dt \\ &= \lambda \int_0^x f(t)dt + \mu \int_0^x g(t)dt \\ &= \lambda (T(f))(x) + \mu (T(g))(x).\end{aligned}$$

Ceci prouve que T est une application linéaire. De plus on a pour tout $f \in E$ et $x \in [0,1]$,

$$|(T(f))(x)| \le \int_0^x |f(t)|dt \le \int_0^1 |f(t)|dt \le \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty \int_0^1 dt = \|f\|_\infty.$$

Donc $\|T(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty$, ce qui prouve que T est continue et que $|||T||| \le 1$. De plus en choisissant la fonction f constante égale à 1, on a pour tout $x \in [0,1]$, $(T(f))(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x dt = x$, donc $\|T(f)\|_\infty = (T(f))(1) = 1 = \|f\|_\infty$. Ainsi $|||T||| = 1$.

Exercice 2

1. f est une fonction polynomiale donc différentiable à n'importe quel ordre. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1-y)(-(x+y-1) + (1-x)) = (1-y)(2-2x-y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1-x)(2-2y-x) \quad \text{(par symétrie en } x, y\text{)}$$

Les points critiques sont les solutions de $\nabla f(x,y) = 0$ soit

$$\begin{cases}(1-y)(2-2x-y) = 0 \\ (1-x)(2-2y-x) = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1-y=0 \\ 1-x=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 1-y=0 \\ 2-2y-x=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2-2x-y=0 \\ 1-x=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2-2x-y=0 \\ 2-2y-x=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=1 \\ x=1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y=1 \\ x=0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2-2x-y=0 \\ 2-2y-x=0 \end{array}\right.$$

Pour le dernier système on a

$$\left\{\begin{array}{l} 2-2x-y=0 \\ 2-2y-x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y=2 \\ x+2y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x=2 \\ x+2y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ y=1-\frac{x}{2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \end{array}\right. .$$

Ainsi les points critiques de f sont $(1,1),(0,1),(1,0)$ et $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

2. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(1-y) & -(2-2x-y)-(1-y) \\ -(2-2x-y)-(1-y) & -2(1-x) \end{pmatrix} \\ H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} 2y-2 & 2x+2y-3 \\ 2x+2y-3 & 2x-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Pour le point critique $(1,1)$:

$$H_f(1,1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de cette matrice vérifient

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_2=\operatorname{Tr} H_f(1,1)=0 \\ \lambda_1\lambda_2=\det H_f(1,1)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=-\lambda_2 \\ -\lambda_1^2=-1 \end{array}\right.$$

donc les valeurs propres sont -1 et 1. On a donc une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, ce qui implique que $(1,1)$ est un **point selle**.
Pour le point critique $(1,0)$:

$$H_f(1,0)=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont les solutions de

$$\chi_{H_f(1,0)}(\lambda)=(-2-\lambda)(-\lambda)-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda-1=0.$$

$\Delta=4-4(-1)=8=(2\sqrt{2})^2$, donc les solutions sont $\lambda_1=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}<0$ et $\lambda_2=-1+\sqrt{2}>0$. On a donc à nouveau un **point selle**.
Pour le point critique $(0,1)$:

$$H_f(0,1)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 vérifient la même équation que précédemment, donc les solutions sont encore une fois $\lambda_1=-1-\sqrt{2}<0$ et $\lambda_2=-1+\sqrt{2}>0$, et on a à nouveau un **point selle**.

Pour le point critique $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$:

$$H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - 2 & \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 3 \\ \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 3 & \frac{4}{3} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont les solutions de

$$\chi_{H_f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})}(\lambda) = \left(-\frac{2}{3} - \lambda\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3} - \lambda - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3} - \lambda + \frac{1}{3}\right) = (\lambda+1)\left(\lambda + \frac{1}{3}\right) = 0.$$

Les solutions sont $\lambda_1 = -1 < 0$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{3} < 0$. Il s'agit donc cette fois d'un **maximum local**.

4. D'après l'étude précédente, on peut déduire que f n'a pas de minimum global puisqu'elle n'a pas de minimum local. De plus lorsque x et y tendent vers $+\infty$, $f(x, y)$ tend vers $+\infty$; par conséquent f n'a pas non plus de maximum global.

Exercice 3

1. C_1 est le cylindre dont la base est le cercle unité dans le plan $(0x_1x_2)$ et dont la direction est celle de l'axe $(0x_3)$. C_2 est le cylindre dont la base est le cercle unité dans le plan $(0x_1x_3)$ et dont la direction est celle de l'axe $(0x_2)$.

   C_1 et C_2 sont des ensembles fermés car ce sont les images réciproques de $\{0\}$ par les fonctions continues h_1 et h_2. De plus pour tout $x \in C$, $x \in C_1$ donc $x_1^2 + x_2^2 = 1$, et $x \in C_2$ donc $x_1^2 + x_3^2 = 1$. Donc $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_3^2) = 2$. Donc $\|x\| \leq \sqrt{2}$, ce qui montre que C est borné.

2. f est une fonction continue, et C est une ensemble fermé borné, donc il existe un minimum de f sur C.

3. C est défini par les deux contraintes égalité $h_1(x) = 0$ et $h_2(x) = 0$. f, h_1 et h_2 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, et

$$\nabla f(x) = (1, -x_3, -x_2), \quad \nabla h_1(x) = (2x_1, 2x_2, 0), \quad \nabla h_2(x) = (2x_1, 0, 2x_3).$$

   $\nabla h_1(x)$ et $\nabla h_2(x)$ sont des vecteurs indépendants sauf si $x_1 = x_2 = 0$ ou si $x_1 = x_3 = 0$ ou si $x_2 = x_3 = 0$. Mais si $x_1 = x_2 = 0$, x ne peut pas appartenir à C puisqu'on devrait avoir $x_1^2 + x_2^2 = 1$. De même si $x_1 = x_3 = 0$, x ne peut pas appartenir à C à cause de la condition $x_1^2 + x_3^2 = 1$. Enfin si $x_2 = x_3 = 0$ et $x \in C$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$ et $x_1^2 + x_3^2 = 1$ impliquent que $x_1 = -1$ ou 1. Il faut donc exclure les points $(-1, 0, 0)$ et $(1, 0, 0)$ des conditions d'optimalité.

   Les conditions d'optimalité s'écrivent donc : si x est minimum de sur C, et si x est différent de $(-1, 0, 0)$ ou $(1, 0, 0)$, alors il existe λ_1 et λ_2 réels tels que $\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1(x) + \lambda_2 \nabla h_2(x) = 0$. Le système à résoudre s'écrit donc

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla h_1(x) + \lambda_2 \nabla h_2(x) = 0 \\ h_1(x) = 0 \\ h_2(x) = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 1 + 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 x_1 = 0 \\ -x_3 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ -x_2 + 2\lambda_2 x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 + x_3^2 = 1 \end{array}\right.$$

Par soustraction sur les deux dernières équations, on obtient $x_2^2 = x_3^2$ soit $x_2 = x_3$ ou $x_2 = -x_3$. Le système est donc équivalent à

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = x_3 \\ 1 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)x_1 = 0 \\ (2\lambda_1 - 1)x_2 = 0 \\ (2\lambda_2 - 1)x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x_2 = -x_3 \\ 1 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)x_1 = 0 \\ (2\lambda_1 + 1)x_2 = 0 \\ (2\lambda_2 + 1)x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_3 = 0 \\ 1 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)x_1 = 0 \\ x_1^2 = 1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_3 \\ 1 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)x_1 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x_2 = -x_3 \\ 1 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)x_1 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}\right.$$

Le premier de ces trois systèmes donne les points $(1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0)$ qui sont exclus d'après ce qui précède. Donc il reste :

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = x_3 \\ x_1 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \\ x_2^2 = \frac{3}{4} \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x_2 = -x_3 \\ x_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} \\ x_2^2 = \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

ce qui donne les points candidats suivants : $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Pour conclure on compare les valeurs de f pour ces quatre points et les deux points exclus. On a

$$\begin{array}{rcl} f(-1, 0, 0) &=& -1 \\ f(1, 0, 0) &=& 1 \\ f(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}) &=& -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{5}{4} \\ f(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}) &=& -\dfrac{5}{4} \\ f(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}) &=& \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4} \\ f(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}) &=& \dfrac{5}{4} \end{array}$$

Finalement, la fonction f atteint sa valeur minimum $-\frac{5}{4}$ en deux points $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

4. On a

$$x \in C \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1^2 + x_3^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_2^2 = x_3^2 \end{array}\right.$$

$$x \in C \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_2 = x_3 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_2 = -x_3 \end{array}\right.$$

Ces deux cas correspondent à deux courbes, qui correspondent aux intersections du cylindre C_1 avec les plans d'équations $x_2 = x_3$ et $x_2 = -x_3$. Il s'agit donc d'ellipses. Des paramétrisations de ces deux ellipses sont données par

$$\mathcal{C}_1 : \left\{\begin{array}{l} x_1(\theta) = \cos\theta \\ x_2(\theta) = \sin\theta \\ x_3(\theta) = \sin\theta \end{array}\right. \qquad \mathcal{C}_2 : \left\{\begin{array}{l} x_1(\theta) = \cos\theta \\ x_2(\theta) = \sin\theta \\ x_3(\theta) = -\sin\theta \end{array}\right.$$

où $\theta \in [0, 2\pi]$.

5. Le minimum de f sur $\mathcal{C}_1$ correspond au minimum sur $[0, 2\pi]$ de la fonction
$$\alpha(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta, \sin\theta) = \cos\theta - \sin^2\theta.$$
On a $\alpha'(\theta) = -\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta(1 + 2\cos\theta)$.

θ	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$\alpha'(\theta)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$\alpha(\theta)$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	1

Le minimum de f sur $\mathcal{C}_2$ correspond au minimum sur $[0, 2\pi]$ de la fonction
$$\beta(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta, -\sin\theta) = \cos\theta + \sin^2\theta.$$
$\beta'(\theta) = -\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta = \sin\theta(2\cos\theta - 1)$.

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\beta'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$\beta(\theta)$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	1

Ainsi le minimum de f sur $C = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ est obtenu uniquement sur la courbe $\mathcal{C}_1$ pour les deux points de paramètres $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta = \frac{4\pi}{3}$, ce qui correspond bien aux points $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$