Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

PARIS DESCARTES

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen du 14 janvier 2014 – durée 1h30

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés pendant l'examen.

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application $T : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad T(f) = f(1) - 2f(0).$$

Montrer que T est une application linéaire continue et calculer $\|\!|T|\!\|$.

Exercice 2 On considère la fonction suivante de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Pour chaque point critique obtenu, dire si f présente un minimum local ou un maximum local en ce point, ou s'il s'agit d'un point selle.
3. Déterminer les maxima et minima globaux de f.

Exercice 3 On considère le problème d'optimisation suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \\ \qquad J(x,y) = x + y, \\ \text{sous les contraintes :} \\ \qquad g_1(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 \leq 0, \\ \qquad g_2(x,y) = (x+4)^2 + (y+3)^2 - 25 \leq 0. \end{array} \right.$$

1. Montrer que l'ensemble des contraintes C est convexe.
2. Interpréter géométriquement l'ensemble C et le dessiner sur une figure.
3. Déterminer les points réguliers de C vis-à-vis des conditions de Karush-Kuhn-Tucker.
4. Ecrire les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème (P), et en déduire la ou les solutions du problème.