Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen du 14 janvier 2014 – correction

Exercice 1 Pour tous $f, g \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} T(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)(1) - 2(\alpha f + \beta g)(0) \\ &= \alpha f(1) + \beta g(1) - 2\alpha f(0) - 2\beta g(0) \\ &= \alpha(f(1) - 2f(0)) + \beta(g(1) - 2g(0)) \\ &= \alpha T(f) + \beta T(g). \end{aligned}$$

Ceci prouve que T est linéaire. De plus,

$$|T(f)| = |f(1) - 2f(0)| \leq |f(1)| + 2[f(0)| \leq 3\|f\|_\infty.$$

Donc T est une application linéaire continue et $\|T\| \leq 3$. De plus on peut facilement trouver une fonction f telle que la majoration précédente soit une égalité : il suffit de prendre une fonction continue qui vaut 1 en 1, -1 en 0 et telle que $\|f\|_\infty = 1$. Par exemple la fonction affine $f(x) = 2x - 1$. On aura alors

$$T(f) = f(1) - 2f(0) = 1 - 2 \times (-1) = 3 = 3 \times 1 = 3 \times \|f\|_\infty.$$

Ainsi la constante 3 est optimale dans la majoration précédente, et donc $\|T\| = 3$.

Exercice 2

1. f est polynomiale donc différentiable à n'importe quel ordre. On a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + 6y \\ 6x - 6y. \end{pmatrix}$$

Les points critiques de f sont les points où le gradient s'annule. On doit donc résoudre

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} 6x^2 + 6y = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y = 0 \\ x = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x = 0 \\ x = y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(x+1) = 0 \\ x = y \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

On a donc deux points critiques, $(0,0)$ et $(-1,-1)$.

2. La hessienne de f s'écrit

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

– Pour le point $(0,0)$ on a
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$
Les deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 vérifient $\lambda_1\lambda_2 = det(H_f(0,0)) = -36 < 0$, donc elles sont non nulles et de signes opposés. Par conséquent, $(0,0)$ **est un point selle**.

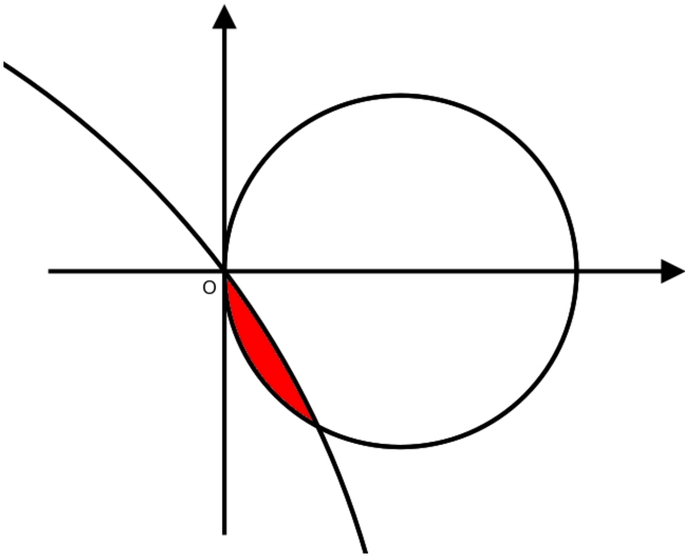
– Pour le point $(-1,-1)$ on a
$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$
Les deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 vérifient $\lambda_1\lambda_2 = det(H_f(-1,-1)) = 72-36 > 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(H_f(-1,-1)) = -18 < 0$, donc elles sont strictement négatives. Par conséquent, f **admet un maximum local en** $(-1,-1)$.

3. f n'a pas de minimum local donc ne peut pas avoir de minimum global. De plus f n'est pas maximale en $(-1,-1)$ car $f(-1,-1) = -2+6-3+2 = 3$ et pour (par exemple) $x = 10$, $y = 0$ on a $f(10,0) = 2002 > 3$. On peut aussi remarquer que $f(x,0) = 2x^3+2$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi f n'a pas d'extremum global.

Exercice 3

1. On a
$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^2,\ g_1(x) \leq 0,\ g_2(x) \leq 0\right\}.$$
g_1 et g_2 sont des fonctions convexes : en effet elles sont polynomiales donc C^2 et leurs hessiennes s'écrivent
$$H_{g_1}(x,y) = H_{g_2}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2. \end{pmatrix}$$
Cette matrice a une valeur propre double strictement positive pour tout (x,y) donc g_1 et g_2 sont strictement convexes. Elles sont même elliptiques car cette valeur propre ne dépend pas de (x,y). Par conséquent les ensembles $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2,\ g_1(x) \leq 0\}$ et $C_2 = \{x \in \mathbb{R}^2,\ g_2(x) \leq 0\}$ sont convexes et C est convexe en tant qu'intersection d'ensembles convexes. Pour le redémontrer : soient $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in C$ et $\lambda \in [0,1]$. Notons $(x_\lambda, y_\lambda) = (1-\lambda)(x_0,y_0) + \lambda(x_1,y_1)$. On a
$$g_1(x_\lambda, y_\lambda) = g_1\left((1-\lambda)(x_0,y_0) + \lambda(x_1,y_1)\right) \leq (1-\lambda)g_1(x_0,y_0) + \lambda g_1(x_1,y_1),$$
par convexité de g_1. Or λ et $1-\lambda$ sont positifs et $g_1(x_0,y_0) \leq 0$, $g_1(x_1,y_1) \leq 0$ puisque $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in C$. Donc $g_1(x_\lambda,y_\lambda) \leq 0$. De même on montre que $g_2(x_\lambda,y_\lambda) \leq 0$. Ainsi $(x_\lambda,y_\lambda) \in C$ et donc C est convexe.

2. On a
$$g_1(x,y) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq 1.$$
$\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ représente la distance entre les points (x,y) et $(1,0)$. Par conséquent les points vérifiant $g_1(x,y) \leq 0$ sont les points dont la distance à $(1,0)$ est inférieure à 1, c'est-à-dire les points du disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1. De même
$$g_2(x,y) \leq 0 \Leftrightarrow (x+4)^2+(y+3)^2 \leq 25 \Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2} \leq 5 \Leftrightarrow \|(x,y)-(-4,-3)\| \leq 5$$
donc C_2 correspond au disque de centre $(-4,-3)$ et de rayon 5. Ainsi C est l'intersection de ces deux disques (partie en rouge sur le dessin ci-dessous).



3. On a
$$\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x+4) \\ 2(y+3) \end{pmatrix}.$$
C étant l'intersection de deux disques, on peut distinguer 4 zones différentes vis-à-vis des contraintes actives ou inactives. Soit (x,y) un point de C. Alors,
   - Si (x,y) se trouve à l'intérieur de C (pas sur le bord), alors aucune des deux contraintes n'est active, donc (x,y) est régulier.
   - Si (x,y) se trouve sur le cercle de rayon 1 mais pas sur le cercle de rayon 5 (bord "gauche" sur la figure), alors la contrainte g_1 est active mais pas g_2. (x,y) est donc régulier si et seulement si $\nabla g_1(x,y)$ est non nul. Or $\nabla g_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (1,0)$ et le point $(1,0)$ ne se trouve pas sur cette frontière (en fait il n'est pas dans C). Donc les points de cette frontière sont réguliers.
   - Si (x,y) se trouve sur le cercle de rayon 5 mais pas sur le cercle de rayon 1 (bord "droit" sur la figure), alors la contrainte g_2 est active mais pas g_1. (x,y) est donc régulier si et seulement si $\nabla g_2(x,y)$ est non nul. Or $\nabla g_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (-4,-3)$ et ce point ne se trouve pas sur cette frontière. Donc les points de cette frontière sont réguliers.
   - Enfin si (x,y) se trouve à l'intersection des deux cercles, les deux contraintes sont actives donc on doit vérifier si les deux gradients sont indépendants en ces points. Déterminons

d'abord ces deux points :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} g_1(x,y)=0 \\ g_2(x,y)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ (x+4)^2+(y+3)^2=25 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1-2x+y^2=1 \\ x^2+16+8x+y^2+9+6y=25 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ x^2+8x+y^2+6y=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ 10x+6y=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ y=-\frac{5x}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+\frac{25}{9}x^2=0 \\ y=-\frac{5x}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{34}{9}x^2-2x=0 \\ y=-\frac{5x}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{34}{9}x-2\right)=0 \\ y=-\frac{5x}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=\frac{9}{17} \\ y=-\frac{5}{3}\times\frac{9}{17}=-\frac{15}{17}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi les deux points cherchés sont $(0,0)$ et $(9/17,-15/17)$. Calculons les gradients en ces points :

- Pour $(0,0)$: $\nabla g_1(0,0)=(-2,0)$ et $\nabla g_2(0,0)=(8,6)$. Ces deux vecteurs sont indépendants, donc $(0,0)$ est un point régulier.
- Pour $(9/17,-15/17)$: $\nabla g_1(9/17,-15/17)=(-16/17,-30/17)$ et $\nabla g_2(9/17,-15/17)=(154/17,72/17)$. Ces deux vecteurs sont aussi indépendants, donc $(9/17,-15/17)$ est un point régulier.

Ainsi **tous les points de C sont réguliers**.

remarque : Pour le dernier cas, on peut procéder différemment en regardant à quelle condition les deux gradients sont liés, en calculant par exemple leur déterminant :

$$\det\left(\nabla g_1(x,y),\nabla g_2(x,y)\right)=\begin{vmatrix} 2(x-1) & 2(x+4) \\ 2y & 2(y+3) \end{vmatrix}=4(x-1)(y+4)-4y(x+3)$$

Ce déterminant est nul lorsque

$$\begin{aligned}
(x-1)(y+4)=y(x+3) &\Leftrightarrow xy+4x-y-4=xy+3y \\
&\Leftrightarrow 4x-4y-4=0 \\
&\Leftrightarrow y=x-1.
\end{aligned}$$

La question est donc de savoir si la droite $y=x-1$ contient un point de C où les deux contraintes sont actives :

$$\begin{cases} g_1(x,y)=0 \\ g_2(x,y)=0 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ (x+4)^2+(y+3)^2=0 \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2=1 \\ (x+4)^2+(x+2)^2=0 \\ y=x-1 \end{cases}.$$

La deuxième équation n'a pas de solution puisque les deux carrés ne peuvent pas être nuls ensemble. Donc les points de C tels que les deux contraintes sont actives ne sont pas sur la droite $y = x - 1$; donc les gradients sont indépendants pour ces points et ces points sont donc réguliers.

4. Tous les points de C sont réguliers, et les fonctions J, g_1, g_2 sont C^1, donc s'il existe des solutions au problème (P) elles doivent forcément vérifier les conditions de Karush-Kuhn-Tucker : il existe μ_1, μ_2 positifs tels que

$$\begin{cases} \nabla J(x,y) + \mu_1 \nabla g_1(x,y) + \mu_2 \nabla g_2(x,y) = 0 \\ \mu_1 g_1(x,y) = 0 \\ \mu_2 g_2(x,y) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\mu_1(x-1) + 2\mu_2(x+4) = 0 \\ 1 + 2\mu_1 y + 2\mu_2(y+3) = 0 \\ \mu_1 g_1(x,y) = 0 \\ \mu_2 g_2(x,y) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(\mu_1+\mu_2)x + 1 + 8\mu_2 - 2\mu_1 = 0 \\ 2(\mu_1+\mu_2)y + 1 + 6\mu_2 = 0 \\ \mu_1 g_1(x,y) = 0 \\ \mu_2 g_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

- 1er cas : $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Alors les équations donnent $1 = 0$, donc il n'y a pas de solution.
- 2e cas : $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 \neq 0$. Alors $g_2(x,y) = 0$ et le système devient

$$\begin{cases} 2\mu_2 x + 1 + 8\mu_2 = 0 \\ 2\mu_2 y + 1 + 6\mu_2 = 0 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu_2(x-y) + 2\mu_2 = 0 \\ 2\mu_2 y + 1 + 6\mu_2 = 0 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = 25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ \mu_2(2y+6) = -1 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = 25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ \mu_2(2y+6) = -1 \\ (x+4)^2 + (x+4)^2 = 25 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ \mu_2(2y+6) = -1 \\ 2x^2 + 16x + 7 = 0 \end{cases}$$

Pour la dernière équation on a $\Delta = 16^2 - 8 \times 7 = 200 = (10\sqrt{2})^2$, donc $x = \frac{-16 \pm 10\sqrt{2}}{4} = -4 \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Les deux solutions pour x sont négatives (c'est évident pour $-4 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$ et c'est vrai aussi pour $-4 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$ car $\sqrt{2} < 3/2$ donc $-4 + \frac{5\sqrt{2}}{2} < -4 + \frac{5\times 3}{4} = \frac{-16+15}{4} < 0$. Or on sait que tous les points de C sont tels que $x \geq 0$ (puisqu'ils appartiennent au disque de centre $(1,0)$ et de rayon 1), donc il n'y a pas de solution ici.

– 3e cas : $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 = 0$. Alors $g_1(x,y) = 0$ et le système devient

$$\left\{\begin{array}{l} 2\mu_1 x + 1 - 2\mu_1 = 0 \\ 2\mu_1 y + 1 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\mu_1(x-y) - 2\mu_1 = 0 \\ 2\mu_1 y + 1 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y - 1 = 0 \\ 2\mu_1 y + 1 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 1 \\ 2\mu_1 y + 1 = 0 \\ 2(x-1)^2 = 1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x - 1 \\ 2\mu_1 y + 1 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Pour la dernière équation : $\Delta = 16 - 8 = 8 = (2\sqrt{2})^2$, donc $x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Si $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $y = x - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, et on a vu que les points de C vérifient $y \leq 0$. Par conséquent ce cas est exclus. Si $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $y = x - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Le point $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ est bien dans C par contre ; en effet on a $g_1\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ puisque ce point est solution du système, et

$$\begin{aligned} g_2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= (1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 4)^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 3)^2 - 25 \\ &= 2(3 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 25 \\ &= 18 - 6\sqrt{2} + 1 - 25 \\ &= -6(1 + \sqrt{2}) < 0. \end{aligned}$$

De plus on a alors $\mu_1 = -\frac{1}{2y} > 0$ donc cette solution est bien acceptable.

– 4e cas : $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 \neq 0$. Alors $g_1(x,y) = g_2(x,y) = 0$ donc $(x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) = (9/17, -15/17)$ d'après la question 3. Le système donne donc

$$\left\{\begin{array}{l} 2(\mu_1+\mu_2)x + 1 + 8\mu_2 - 2\mu_1 = 0 \\ 2(\mu_1+\mu_2)y + 1 + 6\mu_2 = 0 \\ (x,y) = (0,0) \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2(\mu_1+\mu_2)x + 1 + 8\mu_2 - 2\mu_1 = 0 \\ 2(\mu_1+\mu_2)y + 1 + 6\mu_2 = 0 \\ (x,y) = (9/17, -15/17) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 + 8\mu_2 - 2\mu_1 = 0 \\ 1 + 6\mu_2 = 0 \\ (x,y) = (0,0) \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 2(\mu_1+\mu_2)\frac{9}{17} + 1 + 8\mu_2 - 2\mu_1 = 0 \\ -2(\mu_1+\mu_2)\frac{15}{17} + 1 + 6\mu_2 = 0 \\ (x,y) = (9/17, -15/17) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu_1 = -\frac{1}{6} \\ \mu_2 = -\frac{1}{6} \\ (x,y) = (0,0) \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} -16\mu_1 + 154\mu_2 + 17 = 0 \\ -30\mu_1 + 72\mu_2 + 17 = 0 \\ (x,y) = (9/17, -15/17) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu_1 = -\frac{1}{6} \\ \mu_2 = -\frac{1}{6} \\ (x,y) = (0,0) \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 1738\mu_2 + 119 = 0 \\ -240\mu_1 + 572\mu_2 + 136 = 0 \\ (x,y) = (9/17, -15/17) \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu_1 = -\frac{1}{6} \\ \mu_2 = -\frac{1}{6} \\ (x,y) = (0,0) \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} 1738\mu_2 = -119/1738 < 0 \\ -240\mu_1 + 572\mu_2 + 136 = 0 \\ (x,y) = (9/17, -15/17) \end{array}\right.$$

Dans les deux cas c'est impossible car on doit avoir μ_1 et μ_2 positifs.
Finalement le seul point solution des équations KKT est le point $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ce point est aussi l'unique point solution du problème. En effet C est l'intersection de deux disques ; c'est donc un ensemble ferné et borné (compact), et la fonction J est continue, donc elle admet au moins un minimum sur C. Puisque ce ou ces points minimums doivent vérifier KKT, on en déduit que
$\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **est l'unique solution de** (P).