Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

PARIS DESCARTES

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen du 6 janvier 2015

Exercice 1 Soit E l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Pour tous $P, Q \in E$ on pose

$$\phi(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.
2. Soit N la norme associée à ϕ. Pour tout $P \in E$, exprimer $N(P)$ en fonction des coefficients du polynôme P.
3. On pose à présent, pour tout $P \in E$,
$$\|P\| = |P(0)| + |P'(0)| + |P''(0)|.$$
Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur E et exprimer $\|P\|$ en fonction des coefficients de P.
4. Sans les calculer, expliquer pourquoi il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que pour tous $P \in E$,
$$\alpha\|P\| \leq N(P) \leq \beta\|P\|.$$
5. Trouver deux constantes α et β qui satisfont l'inégalité précédente.

Exercice 2 Déterminer s'il en existe les points critiques et leurs types (minimum local, maximum local ou point selle) de la fonction suivante de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 4y.$$

Exercice 3 On considère le problème d'optimisation suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \text{Minimiser } J(x) = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 1)^2 \\ \text{sous les contraintes } g_1(x) = -x_1 - x_2 + 1 \leq 0, \quad g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble C des contraintes est un ensemble compact et convexe du plan et le représenter graphiquement.
2. Sans rien calculer, montrer que le problème admet au moins une solution.
3. Déterminer les points réguliers de l'ensemble C vis-à-vis des conditions de Karush-Kuhn-Tucker.
4. Ecrire les équations de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème et les résoudre.
5. En déduire la ou les solutions du problème.

On cherche à présent à trouver les maximums de J sur C, autrement dit on considère le problème

$$\begin{cases} \text{Minimiser } \tilde{J}(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{sous les contraintes } g_1(x) = -x_1 - x_2 + 1 \leq 0, \quad g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0. \end{cases}$$

6. Sans rien calculer, expliquer pourquoi ce nouveau problème admet une solution unique.
7. En procédant comme précédemment, trouver la solution du problème.