Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen du 6 janvier 2015 - Correction

Exercice 1

1. Pour montrer que ϕ est un produit scalaire, on doit montrer que ϕ est une application bilinéaire symétrique définie positive.
   - Pour tous $P, Q \in E$,

   $$\begin{aligned} \phi(P,Q) &= P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1) \\ &= Q(-1)P(-1) + Q(0)P(0) + Q(1)P(1) \\ &= \phi(Q,P), \end{aligned}$$

     donc ϕ est symétrique.
   - Pour tous $P, Q, R \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a

   $$\begin{aligned} &\phi(\lambda P + \mu Q, R) \\ &= (\lambda P(-1) + \mu Q(-1))R(-1) + (\lambda P(0) + \mu Q(0))R(0) + (\lambda P(1) + \mu Q(1))R(1) \\ &= \lambda P(-1)R(-1) + \mu Q(-1)R(-1) + \lambda P(0)R(0) + \mu Q(0)R(0) + \lambda P(1)R(1) + \mu Q(1)R(1) \\ &= \lambda(P(-1)R(-1) + P(0)R(0) + P(1)R(1)) + \mu(Q(-1)R(-1) + Q(0)R(0) + Q(1)R(1)) \\ &= \lambda\phi(P,R) + \mu\phi(Q,R), \end{aligned}$$

     et de même $\phi(R, \lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(R,P) + \mu\phi(R,Q)$ par symétrie. Donc ϕ est bilinéaire.
   - Pour tout $P \in E$,
   $$\phi(P,P) = P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2 \geq 0,$$
     donc ϕ est positive.
   - Pour tout $P \in E$,

   $$\phi(P,P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(-1) = P(0) = P(1) = 0.$$

     P est alors un polynôme de degré au plus 2 qui a trois racines distinctes, ce qui implique que $P = 0$. Ainsi ϕ est définie positive.

   On a ainsi vérifié que ϕ est un produit scalaire sur E.
2. Soient a, b, c les coefficients de P : $P(x) = ax^2 + bx + c$. On a

   $$P(-1) = a - b + c, \quad P(0) = c, \quad P(1) = a + b + c.$$

   Donc

   $$\begin{aligned} N(P) &= \sqrt{\phi(P,P)} \\ &= \sqrt{P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2} \\ &= \sqrt{(a-b+c)^2 + c^2 + (a+b+c)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac + c^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac} \\ &= \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4ac} \\ &= \sqrt{2(a+c)^2 + 2b^2 + c^2} \end{aligned}$$

3. Vérifions que $\|\cdot\|$ est une norme.
   - Pour tout $P \in E$, $\|P\| = |P(0)| + |P'(0)| + |P''(0)| \geq 0$.
   - Pour tous $P \in E, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|\lambda P\| &= |\lambda P(0)| + |\lambda P'(0)| + |\lambda P''(0)| \\
&= |\lambda||P(0)| + |\lambda||P'(0)| + |\lambda||P''(0)| \\
&= |\lambda|(|P(0)| + |P'(0)| + |P''(0)|) \\
&= |\lambda|\|P\|
\end{aligned}$$

   - Pour tous $P, Q \in E$,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P} + Q\| &= |P(0) + Q(0)| + |P'(0) + Q'(0)| + |P''(0) + Q''(0)| \\
&\leq |P(0)| + |Q(0)| + |P'(0)| + |Q'(0)| + |P''(0)| + |Q''(0)| \\
&\leq (|P(0)| + |P'(0)| + |P''(0)|) + (|Q(0)| + |Q'(0)| + |Q''(0)|) \\
&\leq \|P\| + \|Q\|
\end{aligned}$$

   - Pour tout $P \in E$,

$$\|P\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |P(0)| + |P'(0)| + |P''(0)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(0) = P'(0) = P''(0) = 0.$$

     P est un polynôme de degré ≤ 2 qui vérifie $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$, donc $P = 0$. En effet si $P(x) = ax^2 + bx + c$, on a $P(0) = c$, $P'(0) = b$ et $P''(0) = 2a$ donc $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$ implique $a = b = c = 0$ donc $P = 0$.

   Ainsi $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E. Son expression en fonction des coefficients du polynôme est

$$\|P\| = 2|a| + |b| + |c|.$$

4. E est un espace vectoriel de dimension finie (égale à 3), donc toutes les normes sur E sont équivalentes. Ainsi N et $\|\cdot\|$ sont équivalentes, ce qui signifie précisément qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall P \in E, \alpha\|P\| \leq N(P) \leq \beta\|P\|.$$

5. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $M = \max\{|a|, |b|, |c|\}$. On va d'abord minorer et majorer les normes par rapport à M :

$$M \leq |a| + |b| + |c| \leq 2|a| + |b| + |c| = \|P\|,$$

   et

$$\|P\| = 2|a| + |b| + |c| \leq 4M.$$

   Ainsi $M \leq \|P\| \leq 4M$. Ensuite,

$$N(P) = \sqrt{2(a+c)^2 + 2b^2 + c^2} \leq \sqrt{2(|a| + |c|)^2 + 2b^2 + c^2} \leq \sqrt{2(2M)^2 + 2M^2 + M^2} \leq \sqrt{11}M.$$

   Pour minorer $N(P)$, posons $f(t) = 2(a+t)^2 + \frac{1}{2}t^2$, de sorte que $N(P) = \sqrt{f(c) + 2b^2 + \frac{1}{2}c^2}$, et cherchons à minorer la fonction f : c'est une fonction polynômiale de degré 2, tendant vers $+\infty$ en $\pm\infty$, donc elle admet un minimum sur $\mathbb{R}$ que l'on obtient en annulant sa dérivée :

$$f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(t+a) + t = 5t + 4a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{4}{5}a,$$

$$f(-\frac{4}{5}a) = 2(a - \frac{4}{5}a)^2 + \frac{1}{2}(-\frac{4}{5}a)^2 = \frac{2}{25}a^2 + \frac{16}{50}a^2 = \frac{2}{5}a^2.$$

Ainsi $f(t) \geq \frac{2}{5}a^2$ pour tout t et donc aussi pour $t = c$. On a donc

$$N(P) = \sqrt{f(c) + 2b^2 + \frac{1}{2}c^2} \geq \sqrt{\frac{2}{5}a^2 + 2b^2 + \frac{1}{2}c^2} \geq \sqrt{\frac{2}{5}M^2} = \sqrt{\frac{2}{5}}M.$$

On a donc $\sqrt{\frac{2}{5}}M \leq N(P) \leq \sqrt{11}M$. Finalement en combinant les deux encadrements obtient

$$\frac{1}{4} \times \sqrt{\frac{2}{5}}\|P\| \leq \sqrt{\frac{2}{5}}M \leq N(P) \leq \sqrt{11}M \leq \sqrt{11}\|P\|,$$

donc l'inégalité demandée est vérifiée pour $\alpha = \frac{1}{4} \times \sqrt{\frac{2}{5}}$ et $\beta = \sqrt{11}$.

Exercice 2

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + 4y.$$

f est une fonction polynômiale donc indéfiniement différentiable. Le gradient de f vaut

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + 2z \\ 2y + 2z + 4 \\ 2x + 2y \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z + 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = -x \\ y + z = -2 \\ y = -x \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = -x \\ -2x = -2 \\ y = -x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = -1 \\ x = 1 \\ y = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc f possède un seul point critique : $(1,-1,-1)$.

Ensuite,

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = H_f(1,-1,-1).$$

On doit étudier le signe des trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de cette matrice. On a

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = trH_f(1,-1,-1) = 4 > 0,$$

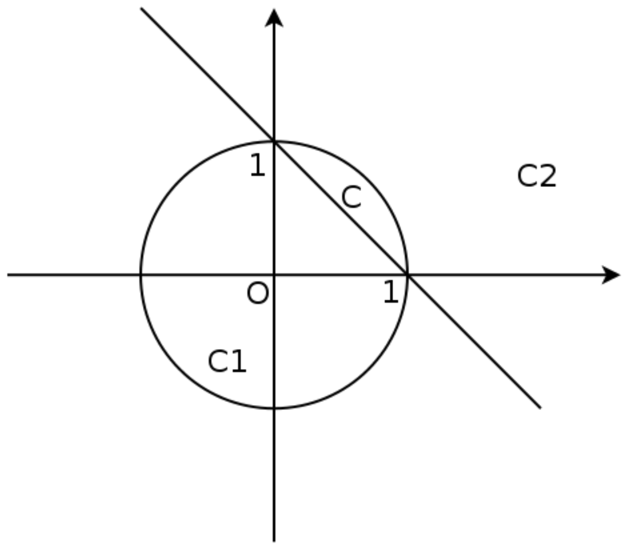
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det H_f(1,-1,-1) = 0 + 0 + 0 - 8 - 0 - 8 = -16 < 0.$$

Le déterminant étant strictement négatif, les trois valeurs propres sont soient toutes strictement négatives, soit l'une est strictement négative et les deux autres sont strictement positives. Comme la trace est positive, seule le deuxième cas est possible. Ainsi la matrice hessienne a deux valeurs propres strictement négatives et une valeur propre strictement positive, et par conséquent **le point critique** $(1,-1,-1)$ **est un point selle**.

Exercice 3

1. On a $C = C_1 \cap C_2$ où $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2,\ g_1(x) \leq 0\} = g_1^{-1}(\mathbb{R}^-)$ et $C_2 = \{x \in \mathbb{R}^2,\ g_2(x) \leq 0\} = g_2^{-1}(\mathbb{R}^-)$. C_2 est le disque unité fermé ; c'est donc un ensemble fermé borné et convexe. C_1 est un demi-plan fermé, donc un ensemble fermé et convexe. Ainsi C est fermé car intersection d'ensembles fermés, convexe car intersection d'ensemble convexes, et borné car inclus dans C_2 qui est borné.

   C est donc l'intersection d'un disque et d'un demi-plan (ce qui se nomme segment circulaire en géométrie) :

   remarque : on peut aussi démontrer à la main les propriétés sans utiliser le fait que ce sont des ensembles connus. C'était inutile dans cet exercice mais pour d'autres contraintes donnés par des fonctions quelconques il aurait fallu le faire. Voici comment :

   g_1 et g_2 sont deux fonctions continues donc les images réciproques par g_1 et g_2 de l'ensemble fermé $\mathbb{R}^-$ sont des ensembles fermés. Ainsi C_1 et C_2 sont fermés et donc leur intersection C aussi. De plus $x \in C_2 \Leftrightarrow \|x\| \leq 1$ donc C_2 est borné, et donc aussi C puisque $C \subset C_2$. Ainsi C est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2$ donc compact.

   Montrons ensuite que C_1 et C_2 sont convexes : soient $x, y \in C_2$ et $\lambda \in [0, 1]$: g_2 étant une fonction convexe (car sa hessienne est égale à $2Id$ donc à valeurs propres strictement positives), on a

   $$g_2(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g_2(x) + (1-\lambda) g_2(y) \leq \lambda \times 0 + (1-\lambda) \times 0 = 0.$$

   Ainsi C_2 est convexe. De même C_1 est convexe car g_1 est une fonction affine donc convexe. Finalement C est convexe car intersection de deux convexes.

2. C est un ensemble compact et J une fonction continue, donc $J(C)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc $J(C)$ admet un minimum : il existe $x \in C$ tel que $J(x) = \min J(C)$. Ainsi le problème admet au moins une solution.

3. Calculons d'abord les gradients des contraintes :

   $$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}.$$

   Soit à présent $x \in C$ et cherchons à savoir si x est un point admissible. On doit distinguer 4 cas suivant la position de x :

   – Si x est à l'intérieur de C (aucune contrainte active), alors nécessairement x est régulier.

– Si g_2 est active mais pas g_1 (x est sur le bord circulaire de C mais pas au extrémités), alors on doit s'assurer que $\nabla g_2(x) \neq 0$. Or $\nabla g_2(x) = 0$ implique $2x_1 = 2x_2 = 0$ donc $x = (0,0)$, ce qui est impossible. Donc finalement tout point de C de ce type est régulier.
– Si g_1 est active mais pas g_2 (x est sur le bord rectiligne de C mais pas au extrémités), alors x est régulier puisque $\nabla g_1(x) = (-1,-1) \neq 0$.
– Si les deux contraintes sont actives, c'est que $x = (1,0)$ ou $x = (0,1)$. On a $\nabla g_1(1,0) = (-1,-1)$ et $\nabla g_2(1,0) = (2,0)$; ces deux vecteurs sont indépendants, donc $(1,0)$ est régulier. De même $\nabla g_1(0,1) = (-1,-1)$ et $\nabla g_2(0,1) = (0,2)$ sont indépendants, donc $(0,1)$ est régulier.

Finalement on a vu que tout point de C est régulier vis-à-vis des conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

4. Les fonctions J, g_1 et g_2 sont de classe C^1, et tout points de C est régulier, donc on sait que tout minimum x de J sur C est solution des équations de Karush-Kuhn-Tucker : il existe $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} \nabla J(x) + \mu_1 \nabla g_1(x) + \mu_2 \nabla g_2(x) = 0 \\ \mu_1 g_1(x) = 0 \\ \mu_2 g_2(x) = 0. \end{cases}$$

On a $\nabla J(x) = (-2(x_1 - 2), -2(x_2 - 1))$, donc les équations s'écrivent

$$\begin{cases} -2(x_1 - 2) - \mu_1 + 2\mu_2 x_1 = 0 \\ -2(x_2 - 1) - \mu_1 + 2\mu_2 x_2 = 0 \\ \mu_1(-x_1 - x_2 + 1) = 0 \\ \mu_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

– Si $\mu_1 = \mu_2 = 0$ alors on obtient

$$\begin{cases} -2(x_1 - 2) = 0 \\ -2(x_2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Le point $(2,1)$ n'appartient pas à C donc on n'a pas de solution dans ce cas.

– Si $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 \neq 0$ on obtient

$$\begin{cases} -2(x_1 - 2) + 2\mu_2 x_1 = 0 \\ -2(x_2 - 1) + 2\mu_2 x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \mu_2)x_1 = 2 \\ (1 - \mu_2)x_2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$\mu_2 \neq 1$ car sinon les équations donnent $2 = 1$. On a donc

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{1-\mu_2} \\ x_2 = \frac{1}{1-\mu_2} \\ \left(\frac{2}{1-\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\mu_2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{1-\mu_2} \\ x_2 = \frac{1}{1-\mu_2} \\ 5 = (1 - \mu_2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{1-\mu_2} \\ x_2 = \frac{1}{1-\mu_2} \\ \mu_2 = \pm\sqrt{5} + 1 \end{cases}$$

μ_2 doit être positif donc $\mu_2 = -\sqrt{5} + 1 < 0$ est exclu. Donc la seule solution ici est $\mu_2 = \sqrt{5} + 1$, $x_1 = -2/\sqrt{5}$, $x_2 = -1/\sqrt{5}$, mais ce n'est pas un point de C.

– Si $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 = 0$ on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} -2(x_1-2)-\mu_1=0 \\ -2(x_2-1)-\mu_1=0 \\ x_1+x_2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=2-\frac{\mu_1}{2} \\ x_2=1-\frac{\mu_1}{2} \\ 2-\frac{\mu_1}{2}+1-\frac{\mu_1}{2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=2-\frac{\mu_1}{2}=1 \\ x_2=1-\frac{\mu_1}{2}=0 \\ \mu_1=2. \end{array}\right.$$

$\mu_1 \geq 0$ et $(1,0) \in C$ donc on a bien ici une solution.

– Si $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 \neq 0$, alors les deux contraintes sont actives, donc on se trouve à l'une des deux extrémités : $x=(1,0)$ ou $x=(0,1)$. De plus les deux premières équations du système donnent

$$\left\{\begin{array}{l} -2(x_1-2)-\mu_1+2\mu_2 x_1=0 \\ -2(x_2-1)-\mu_1+2\mu_2 x_2=0, \end{array}\right.$$

ce qui donne si $x=(1,0)$,

$$\left\{\begin{array}{l} -2(1-2)-\mu_1+2\mu_2=0 \\ -2(0-1)-\mu_1+0=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2-\mu_1+2\mu_2=0 \\ 2-\mu_1+0=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu_1=2 \\ \mu_2=0 \end{array}\right. ,$$

ce qui est exclu car on a supposé $\mu_2 \neq 0$ ici (en fait on retrouve la solution précédente). Et si $x=(0,1)$,

$$\left\{\begin{array}{l} -2(0-2)-\mu_1+0=0 \\ -2(1-1)-\mu_1+2\mu_2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-\mu_1=0 \\ 0-\mu_1+2\mu_2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu_1=4 \\ \mu_2=2 \end{array}\right. ,$$

ce qui donne une autre solution.

Finalement on a deux solutions aux équations de Karush-Kuhn-Tucker : $(x_1,x_2,\mu_1,\mu_2)=(1,0,2,0)$ et $(x_1,x_2,\mu_1,\mu_2)=(0,1,4,2)$.

5. On sait qu'il existe au moins une solution au problème et que toute solution au problème doit être solution des équations KKT. Par conséquent, d'après ce qui précède, il suffit de comparer les valeurs de J en $(1,0)$ et $(0,1)$ pour conclure. On a

$$J(1,0)=-(1-2)^2-(0-1)^2=-1-1=-2$$
$$J(0,1)=-(0-2)^2-(1-1)^2=-4-0=-4$$

donc il y a une solution unique au problème et c'est $x=(0,1)$.

6. $\tilde{J}$ est un fonction strictement convexe (car sa hessienne égale $2Id$ de valeurs propres strictement positives), donc le problème admet au plus une solution. De plus, comme pour le problème précédent, la minimisation se fait sur C qui est compact, donc il existe au moins une solution. ainsi il y a existence et unicité du minimum de $\tilde{J}$ sur C.

7. Le minimum de $\tilde{J}$ sur C doit vérifier les équations de Karush-Kuhn-Tucker qui s'écrivent : il existe $\tilde{\mu}_1,\tilde{\mu}_2 \geq 0$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla\tilde{J}(x)+\tilde{\mu}_1\nabla g_1(x)+\tilde{\mu}_2\nabla g_2(x)=0 \\ \tilde{\mu}_1 g_1(x)=0 \\ \tilde{\mu}_2 g_2(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\nabla J(x)+\tilde{\mu}_1\nabla g_1(x)+\tilde{\mu}_2\nabla g_2(x)=0 \\ \tilde{\mu}_1 g_1(x)=0 \\ \tilde{\mu}_2 g_2(x)=0. \end{array}\right.$$

Si on pose $\mu_1=-\tilde{\mu}_1 \leq 0$ et $\mu_2=-\tilde{\mu}_2 \leq 0$ on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla J(x)+\mu_1\nabla g_1(x)+\mu_2\nabla g_2(x)=0 \\ \mu_1 g_1(x)=0 \\ \mu_2 g_2(x)=0, \end{array}\right.$$

ce qui correspond aux équations de la question 4, avec cette fois $\mu_1,\mu_2 \leq 0$. On reprend les calculs menés précédemment :

- Si $\mu_1 = \mu_2 = 0$, pas de solution.
- Si $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 \neq 0$, alors $\mu_2 = -\sqrt{5} + 1$ et $x_1 = 2/\sqrt{5}$, $x_2 = 1/\sqrt{5}$, qui est dans C, donc on a une solution.
- Si $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 = 0$, alors $\mu_1 = 2 > 0$, donc pas de solution.
- Si $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 \neq 0$, pas d'autre solution

Finalement il n'y a qu'une seule solution aux équations KKT, et comme on sait aussi qu'il n'y a qu'une solution au problème et qu'elle vérifie KKT, alors c'est que $x = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ est l'unique maximum de J sur C.