Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Espaces euclidiens et optimisation - Licence 3e année
Examen du 12/01/2016

Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x) = \left(x_1\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ ,\ x_2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

   Pour quels $x \in \mathbb{R}^2$ l'application f est-elle différentiable ? Déterminer la matrice jacobienne de f lorsqu'elle est définie.

On considère à présent E un espace de Hilbert. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\| \cdot \|$ sa norme.

2. Soient $g : E \to \mathbb{R}$ et $h : E \to E$ deux applications, et $f : E \to E$ l'application définie par $f(x) = g(x)h(x)$. Montrer que si g et h sont différentiables en un point $x \in E$, alors f est différentiable en x, et calculer sa différentielle en fonction de celles de g et h.
3. Montrer que l'application $g : E \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \|x\|$ est différentiable pour $x \neq 0$ et calculer sa différentielle.
4. On considère $f : E \to E$ l'application définie par

$$f(x) = \|x\|x.$$

   Déduire des questions précédentes l'expression de $Df(x).h$ pour tout $x, h \in E$ avec $x \neq 0$, puis montrer qu'on retrouve l'expression obtenue à la première question dans le cas $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^4 - 2x_1^2 + x_2^2.$$

1. Déterminer les points critiques de f et leurs types (minimum local, maximum local, ou point selle).
2. Quels sont les extrema globaux de f ?

Exercice 3 Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble défini par

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^3,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant x_3 \right\}.$$

1. Trouver une fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $C = \{x \in \mathbb{R}^3,\ g(x) \leqslant 0\}$.
2. Montrer que la fonction g est convexe.
3. En déduire que C est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^3$. Montrer aussi que C est un ensemble non vide. On admettra qu'il est aussi fermé.
4. Représenter graphiquement C dans un repère $(O; x_1, x_2, x_3)$.

Soit $y \in \mathbb{R}^3$ fixé. On considère le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Minimiser } J(x) = \|x - y\|^2, \\ \text{avec } x \in C, \end{cases}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

5. Justifier l'existence et l'unicité de la solution x^* du problème (P). Comment appelle-t-on x^* ?
6. On suppose à présent que $y = (1, 1, 0)$. Ecrire les conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème (P), puis en déduire la solution x^*.