Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Espaces euclidiens et optimisation - Licence 3e année
Examen du 12/01/2016 - Correction

Exercice 1

1.
$$f(x) = \left(x_1\sqrt{x_1^2+x_2^2}\ ,\ x_2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right).$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable pour tout $t > 0$, donc f est différentiable dès que $x_1^2 + x_2^2 > 0$, car composée de fonctions différentiables. Or $x_1^2 + x_2^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, donc f est différentiable pour tout $x \neq 0$. En fait f est aussi différentiable en 0, car $\|f(x)\| = \|x\|x\|\| = \|x\|\|x\| = \|x\|^2 = o(\|x\|)$, donc on peut écrire un développement limité de f en 0 ainsi
$$f(0+u) = u\|u\| = 0 + 0 + u\|u\| = f(0) + 0 + o(\|u\|),$$
donc f est différentiable en 0 et sa différentielle est nulle.
Calculons la matrice jacobienne de f pour $x \neq 0$:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) &= \sqrt{x_1^2+x_2^2} + \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) = \frac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) &= \sqrt{x_1^2+x_2^2} + \frac{x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}
\end{aligned}$$
donc la matrice jacobienne de f s'écrit pour $x \neq 0$,
$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2+x_2^2} + \frac{x_1^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \frac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ \frac{x_1x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \sqrt{x_1^2+x_2^2} + \frac{x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{pmatrix}.$$
De plus pour $x = 0$ on a vu que la différentielle de f est nulle, donc on a
$$Jf(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Ecrivons le développement limité de f en x : pour tout $u \in E$ on a
$$\begin{aligned}
f(x+u) &= g(x+u)h(x+u)\\
&= (g(x) + Dg(x).u + \|u\|\varepsilon_1(u))(h(x) + Dh(x).u + \|u\|\varepsilon_2(u)),
\end{aligned}$$
puisque g et h sont différentiables en x. Ici les fonctions $\varepsilon_1 : E \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon_2 : E \to E$ tendent vers 0 en 0 (vers $0 \in E$ pour ε_1 et vers $0 \in \mathbb{R}$ pour ε_2). Donc,
$$\begin{aligned}
f(x+u) &= g(x)h(x) + \{(Dg(x).u)h(x) + g(x)(Dh(x).u)\}\\
&\quad + \|u\|\varepsilon_1(u)h(x) + (Dg(x).u)(Dh(x).u) + (Dg(x).u)\|u\|\varepsilon_2(u)\\
&\quad + \|u\|\varepsilon_1(u)(h(x) + Dh(x).u + \|u\|\varepsilon_2(u))
\end{aligned}$$

Tous les derniers termes (2e et 3e ligne) peuvent s'écrire $\|u\|\varepsilon_3(u)$ avec $\varepsilon_2 : E \to E$ qui tend vers 0 en 0, car on a alors

$$\varepsilon_3(u) = \varepsilon_1(u)h(x) + \frac{1}{\|u\|}(Dg(x).u)(Dh(x).u) + (Dg(x).u)\varepsilon_2(u) + \varepsilon_1(u)(h(x) + Dh(x).u + \|u\|\varepsilon_2(u))$$

et on a $\varepsilon_1(u)h(x)$, $(Dg(x).u)\varepsilon_2(u)$ et $\varepsilon_1(u)(h(x)+Dh(x).u+\|u\|\varepsilon_2(u))$ qui tendent bien vers 0 en 0, ainsi que $\frac{1}{\|u\|}(Dg(x).u)(Dh(x).u)$ car $Dg(x)$ et $Dh(x)$ étant des aplications linéaires continues, il existe $M > 0$ et $N > 0$ tels que $|Dg(x).u| \leqslant M\|u\|$ et $\|Dh(x).u\| \leqslant N\|u\|$, et donc

$$\left\| \frac{1}{\|u\|}(Dg(x).u)(Dh(x).u) \right\| \leqslant \frac{M\|u\| \times N\|u\|}{\|u\|} = MN\|u\|,$$

ce qui tend vers 0 lorsque u tend vers 0. Ainsi

$$f(x+u) = g(x)h(x) + \{(Dg(x).u)h(x) + g(x)(Dh(x).u)\} + \|u\|\varepsilon_3(u).$$

L'application $\psi : u \mapsto (Dg(x).u)h(x) + g(x)(Dh(x).u)$ est clairement linéaire, et continue car

$$\|(Dg(x).u)h(x) + g(x)(Dh(x).u)\| \leqslant M\|u\|\|h(x)\| + |g(x)|N\|u\| = (M\|h(x)\| + |g(x)|N)\|u\|,$$

donc f est bien différentiable en x et sa différentielle s'écrit

$$Df(x).u = (Dg(x).u)h(x) + g(x)(Dh(x).u).$$

3. On a $g(x) = \sqrt{\|x\|^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ce qui est différentiable pour $x \neq 0$ puisque alors $\langle x, x\rangle > 0$ et donc $\sqrt{\ }$ est dérivable en $\langle x, x\rangle$. D'après la règle des différentielles de fonctions composées on a

$$Dg(x).u = \frac{1}{2}2\frac{\langle x, u\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle}} = \frac{\langle x, u\rangle}{\|x\|} = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, u \right\rangle.$$

4. On a $f(x) = g(x)h(x)$ avec $g(x) = \|x\|$ et $h(x) = x$. Donc pour tout $x \neq 0$ et $u \in E$,

$$Df(x).u = (Dg(x).u)h(x) + g(x)(Dh(x).u) = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, u \right\rangle x + \|x\|u = \frac{\langle x, u\rangle}{\|x\|}x + \|x\|u.$$

Si $E = \mathbb{R}^2$, on peut retrouver la matrice jacobienne de f en calculant $Df(x).(1,0)$ et $Df(x).(0,1)$:

$$Df(x).(1,0) = \frac{x_1}{\|x\|}x + \|x\|(1,0) = \frac{x_1}{\|x\|}(x_1, x_2) + \|x\|(1,0) = \left(\frac{x_1^2}{\|x\|} + \|x\|, \frac{x_1x_2}{\|x\|} \right),$$

ce qui correspond bien à la première colonne de $Jf(x)$ obtenue à la première question, et

$$Df(x).(0,1) = \frac{x_2}{\|x\|} + \|x\|(0,1) = \frac{x_2}{\|x\|}(x_1, x_2) + \|x\|(0,1) = \left(\frac{x_1x_2}{\|x\|}, \frac{x_2^2}{\|x\|} + \|x\| \right),$$

ce qui correspond à la deuxième colonne de $Jf(x)$.

Exercice 2

1. On a $\nabla f(x) = (4x_1^3 - 4x_1, 2x_2)$, donc les points critiques vérifient

$$\begin{cases} 4x - 1^3 - 4x - 1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1^3 = x_1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \text{ or } x_1 = 1 \text{ or } x_1 = -1 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

   Les points critiques sont $(0,0)$, $(-1,0)$ et $(1,0)$.
   La matrice hessienne de f s'écrit

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   – pour $(0,0)$: on a

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

   dont les valeurs propres sont -4 et 2, donc $(0,0)$ est un point selle de f.

   – pour $(-1,0)$: on a

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

   dont les valeus propres sont 8 et 2, donc $(-1,0)$ est un minimum local de f.

   – pour $(-1,0)$: la matrice hessienne de f est la même que précédemment, donc $(1,0)$ est aussi un minimum local de f.

2. On peut remarquer que

$$f(x) = x_1^4 - 2x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 - 1)^2 - 1 + x_2^2 \geqslant -1,$$

   et nous avons $f(-1,0) = f(1,0) = -1$. Donc $f(x) \geqslant f(-1,0) = f(1,0)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$: $(-1,0)$ et $(1,0)$ sont les deux minima globaux de f. f n'a pas de maximum global puisqu'il n'a pas de maximum local.

Exercice 3

1. $C = \{x \in \mathbb{R}^3,\ g(x) \leqslant 0\}$ pour $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3$.
2. On a $\nabla g(x) = (2x_1, 2x_2, -1)$ et

$$Hg(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

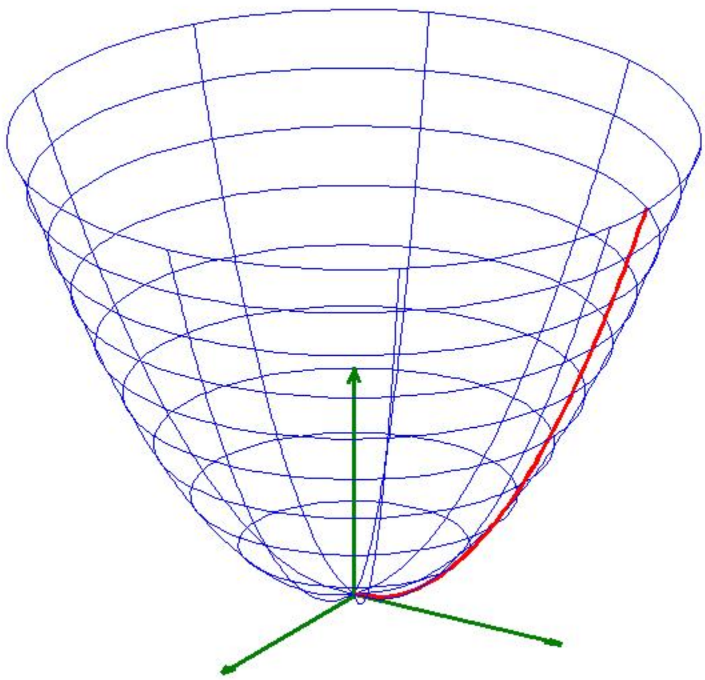
   $Hg(x)$ est une matrice symétrique positive pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, donc g est une fonction convexe.

3. C est convexe car $C = \{x \in \mathbb{R}^3,\ g(x) \leqslant 0\}$ avec g convexe. En effet, soient $x, y \in C$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

   car g est convexe. Or $g(x) \leqslant 0$ puisque $x \in C$, et de même $g(y) \leqslant 0$. De plus comme λ et $1-\lambda$ sont positifs, on en déduit que $\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \leqslant 0$, et donc qu $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant 0$, ce qui siginifie que $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$. Ainsi C est convexe.
   C est non vide puisque $(0,0,0) \in C$.

4. Pour tracer C on peut voir directement qu'il s'agit d'un paraboloïde ou bien remarquer d'abord que $x_3 \geqslant 0$ si $x \in C$; ensuite que lorsque $x_3 \geqslant 0$ est fixé, les points (x_1, x_2, x_3) qui vérifient $x_1^2 + x_2^2 \leqslant x_3$ correspondent à un disque horizontal de rayon $\sqrt{(}x_3)$ et de centre $(0, 0, x_3)$. C correspond donc à une union de disques horizontaux centrés sur l'axe (Ox_3) et de rayons croissants avec x_3. En fait on peut par exemple tracer la courbe $(0, \sqrt{x_3}, x_3)$ pour $x_3 \geqslant 0$, ce qui corrrepond au graphe de la fonction racine carrée en prenant l'axe $(0x_3)$ comme abscisse et (Ox_2) comme ordonnée, puis on trace des cercles horizontaux centrés sur l'axe vertical et passant par les points de la courbe.



C comprend tous les points à l'intérieur et sur la frontière de la surface tracée en bleu.

5. Le problème (P) correspond exactement au problème de projection sur l'ensemble C. Comme C est convexe fermé non vide, ce problème admet une solution unique x^* que l'on appelle projeté de y sur C.

6. J et g sont des fonctions C^1 et on a $\nabla J(x) = 2(x - y) = (2(x_1 - 1), 2(x_2 - 1), 2x_3)$ et $\nabla g(x) = (2x_1, 2x_2, -1)$. $\nabla g(x)$ est toujours non nul, et donc en particulier $\nabla g(x^*) \neq 0$, et donc x^* vérifie les conditions de Karush-Kuhn-Tucker : il existe $\mu \geqslant 0$ tel que x^* soit solution de
$$\nabla J(x) + \mu \nabla g(x) = 0$$
avec $\mu g(x) = 0$.
– Si $g(x) = 0$ (contrainte active) : alors les équations deviennent :
$$\left\{\begin{array}{l} \nabla J(x) + \mu \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(x_1 - 1) + 2\mu x_1 = 0 \\ 2(x_2 - 2) + 2\mu x_2 = 0 \\ 2x_3 - \mu = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1+\mu)x_1 = 1 \\ (1+\mu)x_2 = 1 \\ 2x_3 = \mu \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_2 = 1/(1+\mu) \\ x_3 = \mu/2 \\ \frac{2}{(1+\mu)^2} - \frac{\mu}{2} = 0 \end{array}\right.$$

On a

$$\frac{2}{(1+\mu)^2} - \frac{\mu}{2} = 0 \Leftrightarrow (1+\mu)^2\mu = 4.$$

$\mu = 1$ est solution évidente de cette équation, et donne la solution $x = (1/2, 1/2, 1/2)$. Ensuite on factorise :

$$(1+\mu)^2\mu - 4 = 0 \Leftrightarrow \mu^3 + 2\mu^2 + \mu - 4 = 0 \Leftrightarrow (\mu - 1)(\mu^2 + 3\mu + 4) = 0$$

$\Delta = 9 - 16 < 0$ donc $\mu = 1$ est la seule solution réelle.

– Si $g(x) < 0$ (contrainte inactive) : alors $\mu = 0$ et les équations deviennent

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla J(x) = 0 \\ g(x) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(x_1 - 1) = 0 \\ 2(x_2 - 2) = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3 < 0 \end{array}\right.$$

ce qui n'a pas de solution puisque $1^2 + 1^2 - 0 > 0$

Ainsi finalement les équations n'ont qu'une solution qui correspond donc forcément à x^*. Ainsi $x^* = (1/2, 1/2, 1/2)$.