Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

PARIS DESCARTES

Optimisation - Licence MIA 3e année
Examen partiel du 14/11/2011 - Durée : 1 heure 30

Exercice 1 Calculer lorsqu'elle est définie la différentielle de la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2, x_3) = (\cos(\sqrt{x_1 x_2}), \ln(1/(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2))).$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2^2/x_1 \text{ si } x_1 \neq 0, \\ x_2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées dans toutes les directions en $(0, 0)$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$. Est-elle différentiable en $(0, 0)$?
3. Calculer lorsqu'il est défini le gradient de f.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on note $N_\infty(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$ et $N(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

1. Montrer que N et N_∞ sont des normes sur E. Sont-elles associées à des produits scalaires ?
2. On note $B_\infty = \{x \in E, N_\infty(x) \leq 1\}$ et $B = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$. Expliciter et représenter graphiquement ces deux ensembles. Sont-ils convexes ?
3. Soit $y = (2, 1) \in E$. On considère le problème de "projection" suivant :

   $$\text{Minimiser } J_\infty(x) = N_\infty(x - y) \text{ pour } x \in B_\infty.$$

   Ce problème admet-il une solution unique ?
4. Soit $y \in E$ quelconque. On considère à présent :

   $$\text{Minimiser } J(x) = N(x - y) \text{ pour } x \in B.$$

   Montrer que ce problème admet une solution unique, notée $\pi_B(y)$; et expliciter $\pi_B(y)$ en fonction de y.
5. L'application π_B est-elle continue ? Est-elle différentiable ? Calculer sa différentielle lorsqu'elle est définie.